

## 15 (повышенный уровень, время – 3 мин)

**Тема:** Основные понятия математической логики.

**Что проверяется:**

Знание основных понятий и законов математической логики

1.5.1. Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания.

1.1.7. Умение вычислять логическое значение сложного высказывания по известным значениям элементарных высказываний.

**Про обозначения**

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике ( $\wedge, \vee, \neg$ ), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает  $\wedge$  и  $\vee$ . Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение). В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек ( $\wedge, \vee, \neg$ ), что еще раз подчеркивает проблему. Далее во всех решениях приводятся два варианта записи.

**Что нужно знать:**

- условные обозначения логических операций

$\neg A, \bar{A}$  не A (отрицание, инверсия)

$A \wedge B, A \cdot B$  A и B (логическое умножение, конъюнкция)

$A \vee B, A + B$  A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

$A \rightarrow B$  импликация (следование)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация» (см. презентацию «Логика»)

- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$  или в других обозначениях  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»

- иногда полезны формулы де Моргана<sup>1</sup>:

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$   $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$   $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

- для упрощения выражений можно использовать формулы

$A + A \cdot B = A$  (т.к.  $A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$ )

$A + \bar{A} \cdot B = A + B$  (т.к.  $A + \bar{A} \cdot B = (A + \bar{A}) \cdot (A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B$ )

- некоторые свойства импликации

$A \rightarrow (B \cdot C) = (A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C)$

$A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$

**Связь логики и теории множеств:**

- пересечение множеств соответствует умножению логических величин, а объединение – логическому сложению;
- пустое множество  $\emptyset$  – это множество, не содержащее ни одного элемента, оно играет роль нуля в теории множеств;

<sup>1</sup> Огастес (Август) де Морган – шотландский математик и логик.

- универсальное множество  $I$  – это множество, содержащее все возможные элементы заданного типа (например, все целые числа), оно играет роль логической единицы: для любого множества целых чисел  $X$  справедливы равенства  $X + I = I$  и  $X \cdot I = X$  (для простоты мы используем знаки сложения и умножения вместо знаков пересечения  $\cap$  и объединения  $\cup$  множеств)
- **дополнение**  $\bar{X}$  множества  $X$  – это разность между универсальным множеством  $I$  и множеством  $X$  (например, для целых чисел  $\bar{X}$  – все целые числа, не входящие в  $X$ )
- пусть требуется выбрать множество  $A$  так, чтобы выполнялось равенство  $A + X = I$ ; в этом случае множество  $A$  должно включать дополнение  $\bar{X}$ , то есть  $A \supseteq \bar{X}$  (или «по-простому» можно записать  $A \geq \bar{X}$ ), то есть  $A_{\min} = \bar{X}$
- пусть требуется выбрать множество  $A$  так, чтобы выполнялось равенство  $\bar{A} + X = I$ , в этом случае множество  $\bar{A}$  должно включать дополнение  $\bar{X}$ , то есть  $\bar{A} \supseteq \bar{X}$ ; отсюда  $A \subseteq X$ , то есть  $A_{\max} = X$

## Задачи с поразрядными операциями

### Как вычислять выражение с поразрядными операциями

В задачах ЕГЭ до настоящего времени использовалась только поразрядная логическая операция «И» (она обозначается символом  $\&$ ), которая выполняется между соответствующими битами двоичной записи двух целых чисел. Не забывайте, что

Результат поразрядной операции между целыми числами – это целое число!

Например, найдём результат поразрядной операции  $29 \& 11$ :

$$\begin{array}{r} 29 = 11101_2 \\ 11 = 01011_2 \\ 9 = 01001_2 \end{array}$$

Серым фоном отмечены биты, которые в обоих числах равны 1. Только они и будут равны 1 в числе-результате. Таким образом,  $29 \& 11 = 9$ .

Теперь найдём результат операции  $(29 \& 11 = 0)$ . Не забывайте, что

Результаты операций  $(a \& b = 0)$  и  $(a \& b \neq 0)$  – это логические значения (истина/ложь)!

Вычислим значение выражения:

$$((x \& 26 = 0) \vee (x \& 13 = 0)) \rightarrow ((x \& 78 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

при  $x = 5$ ,  $A = 57$ :

$$((5 \& 26 = 0) \vee (5 \& 13 = 0)) \rightarrow ((5 \& 78 \neq 0) \rightarrow (5 \& 57 = 0))$$

Вычисляем результаты поразрядного И (это числа!):

$$\begin{array}{ll} 5 \& 26 = 0 & 5 \& 13 = 5 \\ 5 \& 78 = 4 & 5 \& 57 = 1 \end{array}$$

Теперь вычисляем логические значения (И – истина, Л – ложь):

$$\begin{array}{ll} (5 \& 26 = 0) = \text{И} & (5 \& 13 = 0) = \text{Л} \\ (5 \& 78 \neq 0) = \text{И} & (5 \& 57 = 0) = \text{Л} \end{array}$$

Наконец, подставляем эти логические значения в заданное выражение:

$$\begin{array}{l} (\text{И} \vee \text{Л}) \rightarrow (\text{И} \rightarrow \text{Л}) \\ \text{И} \rightarrow \text{Л} = \text{Л} \end{array}$$

При заданных условиях выражение ложно.

## Решение задач с поразрядными операциями

Для решения этих задач удобно применять метод, предложенный А.В. Здвижковой (г. Армавир) и обоснованный автором<sup>2</sup>. Введём обозначения

$$Z_K(x) \equiv (x \& K = 0)$$

Это означает, что если истинно  $Z_K(x)$ , то это равносильно тому, что истинно  $x \& K = 0$ . Для сокращения записи вместо  $Z_K(x)$  будем писать просто  $Z_K$ .

Пусть в двоичной записи числа  $K$  бит с номером  $i$ , обозначаемый как  $k_i$ , равен 1. Если при этом для некоторого  $x$  выполнено условие  $Z_K$ , то соответствующий  $i$ -й бит в двоичной записи числа  $x$  равен нулю, так как должно выполняться условие  $x_i \& k_i = 0$ .

Для преобразования выражений полезно следующее свойство:

$$Z_K \cdot Z_M = Z_{K \text{ or } M}$$

где «or» означает поразрядную дизъюнкцию между двумя натуральными числами. Для доказательства предположим, что в двоичной записи числа  $K$  биты с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_q$  равны 1, а остальные равны 0; а в двоичной записи числа  $M$  биты с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_p$  равны 1, а остальные равны 0. Истинность выражения в левой части означает, что все биты числа  $x$ , входящие во множества  $B_K = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$  и  $B_M = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$  одновременно равны нулю. Поэтому любая комбинация битов из этих множеств тоже равна нулю. Это справедливо, в том числе, и для множества, которое представляет собой объединение множеств  $B_K$  и  $B_M$ , то есть, для множества единичных битов числа  $K \text{ or } M$ .

Самый важный результат можно сформулировать так:

Условие  $Z_K \rightarrow Z_M$  истинно для любых натуральных значений  $x$  тогда и только тогда, когда все единичные биты двоичной записи числа  $M$  входят во множество единичных битов двоичной записи числа  $K$ .

*Доказательство.* Пусть в двоичной записи числа  $K$  биты с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_q$  равны 1, а остальные равны 0. Пусть также  $Z_K$  истинно для некоторого  $x$ , это значит, что в числе  $x$  биты с теми же номерами – нулевые. Если все единичные биты двоичной записи числа  $M$  входят во множество  $B_K = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$ , то истинно и высказывание  $Z_M$ , а следовательно – высказывание  $Z_K \rightarrow Z_M$  ( $1 \rightarrow 1 = 1$ ). Если же хотя бы один бит двоичной записи числа  $M$  не входит во множество  $B_K$  (пусть это будет бит с номером  $j$ ), то для тех  $x$ , у которых все биты из множества  $B_K$  нулевые, а бит  $j$  равен 1, выполняется  $Z_K$ , но не выполняется  $Z_M$ , так что высказывание  $Z_K \rightarrow Z_M$  ложно.

Для упрощения выражений полезен следующий результат:

Условие  $Z_K \rightarrow Z_M \cdot \bar{Z}_N$  при любых натуральных  $K, M$  и  $N$  ложно для некоторых натуральных значений  $x$ .

Идея доказательства состоит в том, чтобы представить импликацию в виде произведения двух импликаций:

$$Z_K \rightarrow Z_M \cdot \bar{Z}_N = (Z_K \rightarrow Z_M) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_N).$$

Вторая импликация в правой части ложна хотя бы для некоторых  $x$ , поскольку из того, что некоторые биты числа  $x$  равны нулю (выполняется  $Z_K$ ) совершенно не следует, что какие-то другие (или те же самые) биты того же числа ненулевые (выполняется  $\bar{Z}_N$ ). Строгое доказательство дано в статье, ссылка на которую приведена в сноске на предыдущей странице.

Метод, предложенный А.В. Здвижковой заключается в следующем:

- 1) упростить заданное выражение, сведя его к импликации, в которой нет инверсий

<sup>2</sup> <http://kpolyakov.spb.ru/download/bitwise2.pdf>

- 2) применить полученные выше результаты для нахождения всех подходящих значений неизвестного числа  $a$ , включая минимальное и максимальное значения.

Этот же метод можно применить и в том случае, когда результат поразрядной операции «И» сравнивается не с нулём, а с другими числами. Например, рассмотрим выражение  $R = (x \& 125 = 5)$ . Переведём числа в двоичную систему:

$$\begin{array}{r} 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0 \\ 125 = 1111101_2 \\ 5 = 101_2. \end{array}$$

Истинность  $R$  означает, что

- 1) биты числа  $x$  с номерами 3, 4, 5 и 6 равны 0;
- 2) биты числа  $x$  с номерами 0 и 2 равны 1.

С учётом введённых выше обозначений можно записать эквивалентное условие:

$$R = (x \& 125 = 5) \Leftrightarrow Z_{120} \cdot \bar{Z}_4 \cdot \bar{Z}_1 = 1.$$

Применяя операцию «НЕ» к этому выражению, получаем

$$\bar{R} = (x \& 125 \neq 5) \Leftrightarrow \overline{Z_{120} \cdot \bar{Z}_4 \cdot \bar{Z}_1} = 1 \Leftrightarrow \bar{Z}_{120} + Z_4 + Z_1 = 1.$$

В общем виде для чисел  $b$  и  $c$ , таких, что множество единичных битов числа  $c$  входит во множество единичных битов числа  $b$ , имеем

$$R = (x \& b = c) \Leftrightarrow Z_{b-c} \cdot \bar{Z}_{c_1} \cdot \bar{Z}_{c_2} \dots \bar{Z}_{c_q} = 1$$

$$\bar{R} = (x \& b \neq c) \Leftrightarrow \bar{Z}_{b-c} + Z_{c_1} + Z_{c_2} + \dots + Z_{c_q} = 1.$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_q$  – степени числа 2, которые соответствуют единичным битам числа  $c$ . Например, для  $c = 5 = 101_2$  имеем  $c_1 = 2^2 = 4$ ,  $c_2 = 2^0 = 1$ .

### Пример задания:

**Р-35 (демо-2021).** Обозначим через **ДЕЛ (n, m)** утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

#### Решение (теоретическое):

- 1) для сокращения записи введём обозначения:

$$\text{ДЕЛ}(x, A) = A$$

$$\text{ДЕЛ}(x, 6) = D_6$$

$$\text{ДЕЛ}(x, 9) = D_9$$

- 2) перепишем выражение в виде  $\bar{A} \rightarrow (D_6 \rightarrow \bar{D}_9) = 1$

- 3) используя формулу  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ , раскроем первую импликацию:

$$A + (D_6 \rightarrow \bar{D}_9) = 1$$

- 4) и вторую:

$$A + \bar{D}_6 + \bar{D}_9 = 1$$

- 5) согласно правилу де Моргана  $\bar{D}_6 + \bar{D}_9 = \overline{D_6 \cdot D_9}$ , так что

$$A + \overline{D_6 \cdot D_9} = 1$$

- 6) сведём выражение к единственной импликации

$$D_6 \cdot D_9 \rightarrow A = 1$$

- 7) сформулируем правило, которое мы получили: если значение  $x$  делится на 6 и делится на 9, то оно делится на  $A$ ;
- 8) если значение  $x$  делится на 6 и делится на 9, то оно делится на наименьшее общее кратное  $\text{НОК}(6,9)=18$ , поэтому наибольшее значение  $A$ , удовлетворяющее условию, равно 18

9) Ответ: 18.

Решение (с помощью программы):

- 1) для проверки решения (при наличии времени) можно использовать программу; напишем её на языке Python
- 2) определим логическую функцию `Del` с двумя аргументами, которая проверяет делимость первого аргумента `x` на второй аргумент `D` (если `x` делится на `D`, возвращается `True`)

```
def Del( x, D ):
    return x % D == 0
```

Функция названа `Del` с большой буквы, чтобы её имя отличалось от команды удаления `del`.

- 3) теперь определим функцию `f(x, A)`, которая вычисляет заданное нам выражение:

```
def f( x, A ):
    return (not Del(x,A)) <= (Del(x,6) <= (not Del(x,9)))
```

здесь импликация заменяется на `<=` (спасибо за идею А. Сидорову) с учётом того, что `False < True`; проверим правильность такой замены по таблице истинности операции импликация:

A	B	A→B	A<=B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

- 4) основная программа проверяет выражение на истинность полным перебором (методом «грубой силы», англ. *brute force*) для возрастающих значений `A`; предполагаем, что наибольшее `A` меньше, чем 1000; тогда

```
for A in range(1, 1000):
    if A подходящее:
        print( A )
```

- 5) что значит «`A` подходящее»? Это означает, что при всех натуральных `x` выражение `f(x)` истинно; это можно проверить перебором, скажем, для всех `x`, меньших 1000:

```
for A in range(1,1000):
    OK = True
    for x in range(1,1000):
        if not f(x,A):
            OK = False
            break
```

```
if OK:
    print( A )
```

- 6) блок, выделенный серым фоном – это проверка очередного значения `A`; сначала логическая переменная `OK` равна `True` (все хорошо); если для какого-то `x` функция `f(x)` вернула значение `False` (ложь), переменной `OK` присваивается значение `False` (это `A` не подходит) и цикл заканчивается досрочно с помощью оператора `break` (остальные значения `x` проверять нет смысла, всё уже понятно)

- 7) если внутренний цикл отработал и переменная `OK` осталась равной `True`, то `A` подходит и выводится на экран

- 8) программа выводит

```
1
2
3
6
9
18
```

ответом будет последнее выведенное значение `A`, равное 18

- 9) Ответ: 18.

В некоторых случаях диапазона `[1;999]`, который используется при переборе значений `A` и `x`, может не хватить для правильного решения задачи. Например, при некотором `A` программа просто не дойдёт до значения `x > 999`, при котором нарушится истинность высказывания, и

это А будет принято за правильный ответ. Поэтому лучше увеличивать диапазон перебора до 10000-50000, по крайней мере, для переменной х.

10) приведём полную программу:

```
def Del( x, D ):
    return x % D == 0

def f( x, A ):
    return (not Del(x,A)) <= (Del(x,6) <= (not Del(x,9)))

for A in range(1,1000):
    OK = True
    for x in range(1,1000):
        if not f(x,A):
            OK = False
            break
    if OK:
        print( A )
```

Для других задач этого типа достаточно заменить логическое выражение в функции  $f(x)$ .

11) возможна краткая, но менее понятная форма программы без функций, использующая попеременно числовые и логические значения и операции с ними (А. Сидоров, <https://www.youtube.com/watch?v=vdllsolkM>):

```
for A in range(1,1000):
    OK = 1
    for x in range(1,1000):
        OK *= (x % A != 0) <= ((x % 6 == 0) <= (x % 9 != 0))
    if OK:
        print( A )
```

При умножении ложное значение равносильно нулю, поэтому если хотя бы для одного значения  $x$  условие не выполняется, переменная  $OK$  в конце внутреннего цикла будет равна 0.

**Решение (с помощью программы, И. Моисеев):**

1) напомним понятную форму программы без функций; преобразования, используя формулу  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ , получаем выражение:

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg (\text{ДЕЛ}(x, 6) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

Так как формула должна быть тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ), то необходимо, чтобы выполнялось хотя одно условие в этом выражении.

2) программа проверяет выражение на истинность каждое слагаемое полным перебором для возрастающих значений  $A$ ; предполагаем, что наибольшее  $A$  не превышает 1000, тогда

```
a = [] # массив хранения значений A
for A in range(1,1001):
    countX = 0
    for x in range(1,1001):
        if (x%A == 0) or not(x%6 == 0) or not(x%9 == 0):
            countX += 1
    if countX == 1000: #все числа X перебрали
        a.append(A)
print( max(a) )
```

3) если после отработки внутреннего цикла переменная  $countX$  стала равна 1000, то это говорит о том, что при всех числах  $X$  хотя одно из слагаемых будет равно **True**; тогда текущее значение  $A$  подходит и записывается в массив  $a$

4) после работы программы в массиве оказываются значения:

```
1
2
3
6
9
```

18

функция **max (a)** позволяет определить ответ – наибольшее значение A, равное 18

5) Ответ: **18**.

### Ещё пример задания:

**P-34. (С.С. Поляков)** Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(5k + 6n > 57) \vee ((k \leq A) \wedge (n < A))$$

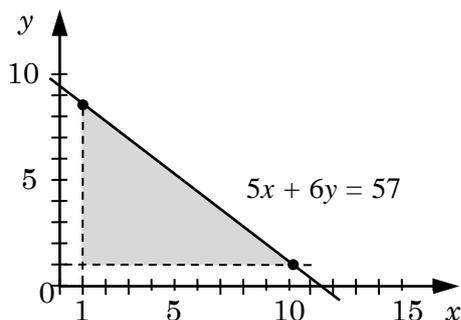
истинно для любых целых положительных значений k и n.

#### Решение:

- особенность этой задачи – «уход» авторов от привычных обозначений переменных, x и y; поскольку мы будем работать с графиками на плоскости, удобнее всё же вернуться к стандартным переменным x и y (понятно, что результат от этого не изменится)

$$(5x + 6y > 57) \vee ((x \leq A) \wedge (y < A))$$

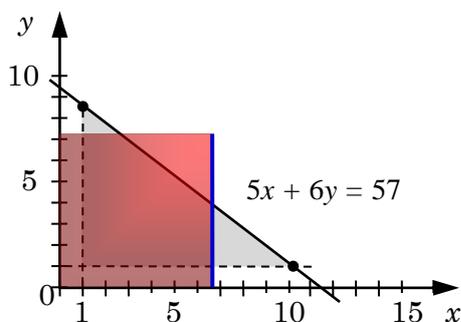
- первое выражение  $(5x + 6y > 57)$  не зависит от выбора A
- таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие  $(x < A)$  and  $(y \leq A)$  выполнялось при всех x и y, для которых ложно  $(5x + 6y > 57)$ , то есть истинно  $(5x + 6y \leq 57)$
- Нужно также учесть, что x и y положительны и добавить ещё два ограничения:  $(x \geq 1)$  and  $(y \geq 1)$ , таким образом, получаем треугольник, ограниченный линиями  $(5x + 6y = 57)$  and  $(x \geq 1)$  and  $(y \geq 1)$



- для всех точек этого треугольника с целочисленными координатами должно выполняться условие

$$(x \leq A) \wedge (y < A)$$

- это значит, что треугольник (точнее, все его точки с целочисленными координатами) должен оказаться внутри квадрата со стороной A, причем в силу нестрогости неравенства  $(x \leq A)$  правая граница квадрата (она выделена жирной синей линией) может совпадать с точками треугольника:



- находим точку пересечения прямых  $5x + 6y = 57$  и  $x = 1$ :  $y \approx 8,67$ ; поскольку нужно выполнить условие  $(y < A)$ , получаем  $A > 8$
- находим точку пересечения прямых  $5x + 6y = 57$  и  $y = 1$ :  $x = 10,2$ ; поскольку нужно выполнить условие  $(x \leq A)$ , получаем  $A \geq 10$

9) оба условия нужно выполнить одновременно, поэтому выбираем наиболее жёсткое:  $A \geq 10$ , что даёт  $A_{\min} = 10$ .

10) Ответ: **10**.

11) заметим, что эту простую задачу можно было решать и аналитически, учитывая, что нам достаточно рассматривать не все точки треугольника, а только отрезок прямой  $5x + 6y = 57$ , ограниченный прямыми  $x = 1$  и  $y = 1$ : если все точки этого отрезка окажутся внутри красного квадрата, то и все остальные точки треугольника тоже будут внутри красного квадрата; поэтому находим максимальную целочисленную координату  $y$  на отрезке:

$$5x + 6y = 57 \text{ и } x = 1: y \approx 8,67 \Rightarrow y_{\max} = 8$$

затем – максимальную целочисленную координату  $x$  на отрезке:

$$5x + 6y = 57 \text{ и } y = 1: x = 10,2 \Rightarrow x_{\max} = 10$$

и выбираем наименьшее  $A$ , при котором ( $y_{\max} < A$ ) и ( $x_{\max} \leq A$ ), то есть  $A_{\min} = 10$

**Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):**

1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( k, n, A ):
    return (5*k + 6*n > 57) or (k <= A) and (n < A)
```

```
for A in range(1,1000):
    OK = True
    for k in range(1,1000):
        for n in range(1,1000):
            if not f(k, n, A):
                OK = False
                break
    if OK:
        print( A )
        break
```

2) вариант без функции:

```
for A in range(1,1000):
    OK = 1
    for k in range(1,1000):
        for n in range(1,1000):
            OK *= (5*k + 6*n > 57) or (k <= A) and (n < A)
            if not OK: break
    if OK:
        print( A )
        break
```

3) Ответ: **10**.

**Ещё пример задания:**

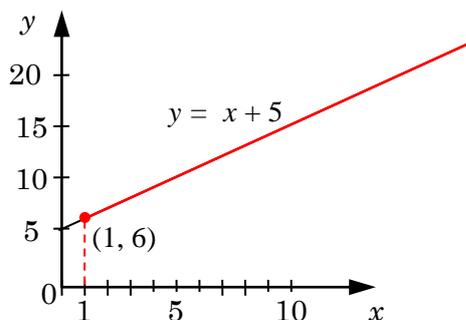
**P-33. (С.С. Поляков)** Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x \neq 5) \vee (A < 2x^3 + y) \vee (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

**Решение:**

- 1) первое выражение  $(y - x \neq 5)$  не зависит от выбора  $A$
- 2) таким образом, нам нужно выбрать значение  $A$  так, чтобы условие  $(A < 2x^3 + y)$  or  $(A < y^2 + 16)$  выполнялось при всех  $x$  и  $y$ , для которых ложно  $(y - x \neq 5)$ , то есть истинно  $(y - x = 5)$  или  $y = x + 5$
- 3) нарисуем линию  $y = x + 5$ . Нужно также учесть, что  $x$  и  $y$  положительны и добавить ещё два ограничения:  $(x \geq 1)$  and  $(y \geq 1)$ .



- 4) находим точку пересечения прямых  $y = x + 5$  и  $x = 1$ :  $(x = 1, y = 6)$ ;
- 5) по условию задачи нужно, чтобы для всех точек прямой  $y = x + 5$  справа от точки  $(1, 6)$  (они выделены красным цветом) было выполнено условие  $(A < 2x^3 + y)$  **or**  $(A < y^2 + 16)$
- 6) поскольку два условия связаны с помощью операции ИЛИ, достаточно выполнения одного из этих условий
- 7) рассмотрим условие  $(A < 2x^3 + y)$ ; минимальные значения  $x$  и  $y$  из всех точек красного луча имеет крайняя точка  $(1, 6)$ , причём здесь достигается одновременно и минимум  $x$ , и минимум  $y$ ; поэтому получаем  $(A < 2x^3 + y) \Rightarrow (A < 2 \cdot 1^3 + 6) \Rightarrow (A < 8)$
- 8) для второго условия  $(A < y^2 + 16)$  также рассматриваем самое жёсткое ограничение – в точке  $(1, 6)$ , где значение  $y$  минимально; получаем  $(A < 6^2 + 16) \Rightarrow (A < 52)$
- 9) Поскольку должно выполняться одно из условий  $(A < 8)$  **or**  $(A < 52)$ , выбираем наименее жёсткое:  $(A < 52)$
- 10) Ответ: **51**.

**Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):**

- 1) программа на Python, полный перебор:
 

```
def f( x, y, A ):
    return (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 + 16)

for A in range(1,100):
    OK = True
    for k in range(1,1000):
        for n in range(1,1000):
            if not f(k, n, A):
                OK = False
                break
    if OK:
        print( A )
```
- 2) ещё один вариант с функцией (перебор значений  $A$  в порядке убывания):
 

```
def f( x, y, A ):
    return (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 + 16)

for A in range(100, 0, -1):
    OK = True
    for k in range(1,1000):
        for n in range(1,1000):
            if not f(k, n, A):
                OK = False
                break
    if OK:
        print( A )
        break
```
- 3) вариант без функции:
 

```
for A in range(1,100):
    OK = 1
    for x in range(1,1000):
        for y in range(1,1000):
            OK *= (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 + 16)
```

- ```

        if not OK: break
    if OK:
        print( A )
4) ещё один вариант без функции:
    for A in range(100, 0, -1):
        OK = 1
        for x in range(1,1000):
            for y in range(1,1000):
                OK *= (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 + 16)
                if not OK: break
        if OK:
            print( A )
            break
5) Ответ: 51.

```

### Ещё пример задания:

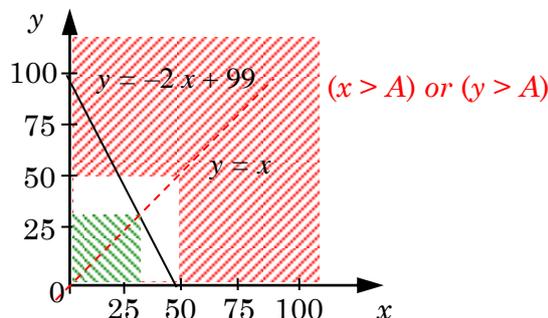
**P-32.** Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 2x \neq 99) \vee (y > A) \vee (x > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

#### Решение:

- 1) первое выражение не зависит от выбора  $A$ : ( $y + 2x \neq 99$ )
- 2) таким образом, нам нужно выбрать значение  $A$  так, чтобы условие ( $y > A$ ) or ( $x > A$ ) выполнялось при всех  $x$  и  $y$ , для которых ложно ( $y + 2x \neq 99$ ), то есть истинно ( $y + 2x = 99$ ) или  $y = -2x + 99$
- 3) нарисуем линию  $y = -2x + 99$ , а также заштрихуем область ( $y > A$ ) or ( $x > A$ ) для некоторого значения  $A$ , например, для  $A = 50$  (конечно, нужно учесть, что  $x$  и  $y$  положительны и добавить ещё два ограничения: ( $x > 0$ ) and ( $y > 0$ )):



- 4) по условию задачи нужно, чтобы все точки отрезка прямой  $y = -2x + 99$  в первой четверти оказались в заштрихованной зоне
- 5) поэтому все точки образовавшегося белого квадрата, в том числе и его вершина  $(A, A)$ , должны находиться строго под этим отрезком; такой квадрат, соответствующий максимальному значению  $A$ , выделен на рисунке зелёной штриховкой
- 6) находим координаты вершины зелёного квадрата: находим точку пересечения прямых  $y = -2x + 99$  и  $y = x$ ; эта задача сводится к линейному уравнению  $x = -2x + 99$  решение которого —  $x = 33$
- 7) значение  $A$  должно быть меньше этого  $x$ , поэтому максимальное значение  $A = 32$
- 8) Ответ: 32.

### Ещё пример задания:

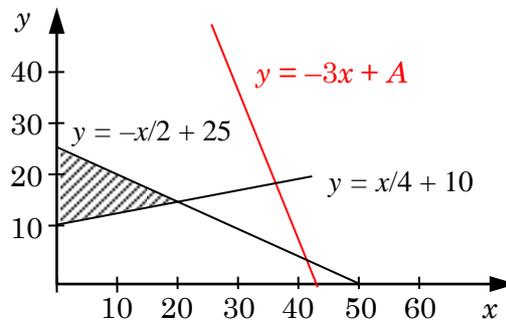
**P-31.** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 3x < A) \vee (2y + x > 50) \vee (4y - x < 40)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

#### Решение:

- 1) второе и третье выражения не зависят от выбора  $A$ :  $(2y + x > 50)$  or  $(4y - x < 40)$
- 2) таким образом, нам нужно выбрать значение  $A$  так, чтобы условие  $(y + 3x < A)$  выполнялось при всех  $x$  и  $y$ , для которых ложно  $(2y + x > 50)$  or  $(4y - x < 40)$ , то есть истинно  $(2y + x \leq 50)$  and  $(4y - x \geq 40)$
- 3) последние два условия можно переписать в виде  $(y \leq -x/2 + 25)$  and  $(y \geq x/4 + 10)$
- 4) поскольку по условию  $x$  и  $y$  должны быть положительны, добавляем ещё два условия:  $(y \leq -x/2 + 25)$  and  $(y \geq x/4 + 10)$  and  $(x > 0)$  and  $(y > 0)$
- 5) изобразим схематично на плоскости  $x - y$  эту область (она заштрихована):



- 6) для всех точек этой области должно выполняться условие  $y + 3x < A$ , равносильное условию  $y < -3x + A$
- 7) это значит, что вся область должна лежать ниже линии  $y = -3x + A$ ; одна такая подходящая линия показана на рисунке сверху
- 8) из рисунка видно, что при параллельном переносе вниз, соответствующем изменению  $A$ , она коснётся заштрихованной области в правой вершине заштрихованного треугольника
- 9) найдём эту точку пересечения:  
 $y = -x/2 + 25 = x/4 + 10 \Rightarrow x = 20, y = 15$
- 10) поэтому допустимые значения  $A$  определяются условием:  
 $15 < -3 \cdot 20 + A \Rightarrow A > 75$   
откуда следует, что  $A_{\min} = 76$ .
- 11) Ответ: **76**.

Примечание: фактически эта задача представляет собой задачу целочисленного **линейного программирования**, на что впервые обратил внимание **Б.А. Державец**<sup>3</sup>.

**Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):**

- 1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( x, y, A ):
    return (y + 3*x < A) or (2*y + x > 50) or (4*y - x < 40)

for A in range(1, 200):
    OK = True
    for x in range(1,1000):
        for y in range(1,1000):
            if not f(x, y, A):
                OK = False
                break
    if OK:
        print( A )
        break
```
- 2) вариант без функции:

```
for A in range(1, 200):
    OK = 1
    for x in range(1,1000):
        for y in range(1,1000):
            OK *= (y + 3*x < A) or (2*y + x > 50) or (4*y - x < 40)
```

<sup>3</sup> [http://informatics-ege.blogspot.ru/2018/05/simplex-method-and-task-18-advanced\\_16.html](http://informatics-ege.blogspot.ru/2018/05/simplex-method-and-task-18-advanced_16.html)

```

        if not OK: break
    if OK:
        print( A )
        break

```

3) Ответ: **76**.

### Ещё пример задания:

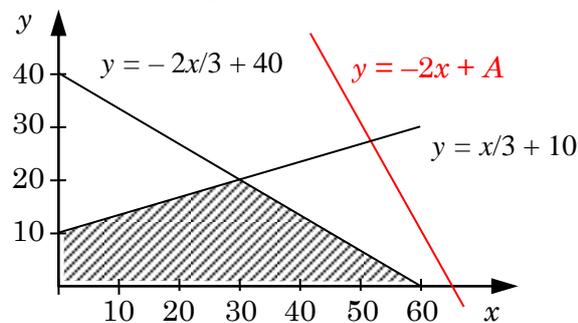
**P-30.** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (3y + 2x > 120) \vee (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

#### Решение:

- 1) второе и третье выражения не зависят от выбора  $A$ :  $(3y + 2x > 120)$  or  $(3y - x > 30)$
- 2) таким образом, нам нужно выбрать значение  $A$  так, чтобы условие  $(y + 2x < A)$  выполнялось при всех  $x$  и  $y$ , для которых ложно  $(3y + 2x > 120)$  or  $(3y - x > 30)$ , то есть истинно  $(3y + 2x \leq 120)$  and  $(3y - x \leq 30)$
- 3) последние два условия можно переписать в виде  $(y \leq -2x/3 + 40)$  and  $(y \leq x/3 + 10)$
- 4) поскольку по условию  $x$  и  $y$  должны быть положительны, добавляем ещё два условия:  $(y \leq -2x/3 + 40)$  and  $(y \leq x/3 + 10)$  and  $(x > 0)$  and  $(y > 0)$
- 5) изобразим схематично на плоскости  $x - y$  эту область (она заштрихована):



- 6) для всех точек этой области должно выполняться условие  $y + 2x < A$ , равносильное условию  $y < -2x + A$
- 7) это значит, что вся область должна лежать ниже линии  $y = -2x + A$ ; одна такая подходящая линия показана на рисунке сверху
- 8) поскольку коэффициент наклона этой линии  $(-2)$  по модулю больше, чем коэффициент прямой  $y = -2x/3 + 40$ , при параллельном переносе вниз, соответствующем изменению  $A$ , она коснется заштрихованной области не в вершине, а в угловой точке около оси  $Ox$
- 9) таким образом третье условие не влияет на результат, и для всех  $x > 0$  и  $y > 0$ , удовлетворяющих условию  $3y + 2x \leq 120$ , нужно обеспечить выполнение условия  $y < -2x + A$
- 10) умножим обе части последнего неравенства на 3:  $3y < -6x + 3A$
- 11) теперь, учитывая, что  $3y \leq -2x + 120$ , получаем, что максимальное значение  $3y$ , которое нужно «перекрыть», равно  $-2x + 120$
- 12) поэтому получаем  $-2x + 120 < -6x + 3A$  или  $3A > 120 + 4x$
- 13) максимально возможное значение  $x$ , удовлетворяющее условию  $3y + 2x \leq 120$ , определяется подстановкой минимального  $y$ , равного 1:  $3 + 2x \leq 120 \Rightarrow 2x \leq 117 \Rightarrow x_{\max} = 58$
- 14) поэтому допустимые значения  $A$  определяются условием:  
 $3A > 120 + 4x_{\max} = 120 + 4 \cdot 58 = 352$   
откуда следует, что  $A > 117,6$ , то есть  $A_{\min} = 118$ .
- 15) Ответ: **118**.

**Ещё пример задания:**

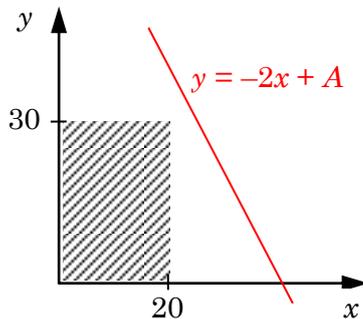
**P-29.** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (x > 20) \vee (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

**Решение:**

- 1) второе и третье выражения не зависят от выбора  $A$ :  $(x > 20)$  or  $(y > 30)$
- 2) таким образом, нам нужно выбрать значение  $A$  так, чтобы условие  $(y + 2x < A)$  выполнялось при всех  $x$  и  $y$ , для которых ложно  $(x > 20)$  or  $(y > 30)$ , то есть истинно  $(x \leq 20)$  and  $(y \leq 30)$
- 3) поскольку по условию  $x$  и  $y$  должны быть положительны, добавляем ещё два условия:  $(x \leq 20)$  and  $(y \leq 30)$  and  $(x > 0)$  and  $(y > 0)$
- 4) изобразим схематично на плоскости  $x - y$  эту область (она заштрихована):



- 5) для всех точек этой области должно выполняться условие  $y + 2x < A$ , равносильное условию  $y < -2x + A$
- 6) это значит, что вся область должна лежать ниже линии  $y = -2x + A$ ; одна такая подходящая линия показана на рисунке сверху
- 7) очевидно, что минимальное значение  $A$  соответствует ситуации, когда при параллельном переносе показанной линии вниз, соответствующем изменению  $A$ , она коснётся правого верхнего угла заштрихованного прямоугольника, то есть пройдёт через точку  $(x = 20, y = 30)$
- 8) поэтому допустимые значения  $A$  определяются условием:  
 $30 < -2 \cdot 20 + A$   
откуда следует, что  $A > 70$ , то есть  $A_{\min} = 71$ .
- 9) Ответ: **71**.

**Ещё пример задания:**

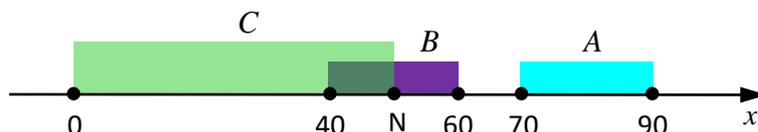
**P-28.** На числовой прямой даны отрезки  $A = [70; 90]$ ,  $B = [40; 60]$  и  $C = [0; N]$  и функция

$$F(x) = (\neg(x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge (\neg(x \in C) \rightarrow (x \in A))$$

При каком наименьшем числе  $N$  функция  $F(x)$  истинна более чем для 30 целых чисел  $x$ ?

**Решение:**

- 1) для сокращения записи введём обозначения  
 $A = (x \in A)$ ,  $B = (x \in B)$ ,  $C = (x \in C)$ .  
фактически  $A(x)$  – это логическая функция, определяющая принадлежность числа  $x$  отрезку  $A$
- 2) запишем функцию в виде:  
 $F(x) = (\bar{A} \rightarrow B)(\bar{C} \rightarrow A) = (A + B)(C + A)$
- 3) используя распределительный закон логики, упрощаем:  
 $F(x) = A + B \cdot C$
- 4) это значит, что функция истинна на всём отрезке  $A$  (там 21 целое число) и на общей части отрезков  $B$  и  $C$ , где должно быть не менее  $31 - 21 = 10$  целых чисел
- 5) нарисуем отрезки на числовой оси:



- 6) по рисунку видно, что
  - а) при  $N < 40$  отрезки  $B$  и  $C$  не имеют общей части
  - б) при  $N \in [40; 60]$  общая части отрезков  $B$  и  $C$  – это отрезок  $[40; N]$ , на нём расположены  $N - 40 + 1$  целых чисел
  - в) при  $N > 60$  общая части отрезков  $B$  и  $C$  совпадает с отрезком  $B$ , ему принадлежит 21 целое число
- 7) таким образом, функция  $F(x)$  может быть истинной не более чем для 42 целых чисел
- 8) если требуется обеспечить её истинность для 31 целого числа, нужно выбрать  $N$  из условия  $N - 40 + 1 = 10$ , откуда  $N = 49$
- 9) Ответ: **49**.

**Решение (программа на Python, А.Н. Носкин):**

- 1) Упрощаем выражение:  $F(x) = A + B \cdot C$
- 2) Примем отрезки за множество, тогда все числа отрезков будут элементами соответствующего множества. Сумма количества элементов множества  $A$  и количества элементов, которые соответствуют пересечению множеств  $B$  и  $C$  должна быть более 30.
- 3) Создадим множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ :
 

```
A = {i for i in range(70, 91)} # множество A
B = {i for i in range(40, 61)} # множество B
C = set() # множество C
```
- 4) В цикле будем добавлять элементы в множество  $C$ , пока сумма элементов  $A + B \cdot C$  не достигнет более 30.

```
for N in range(90):
    C.add(N)
```

Если такое число достигнуто, то выводим ответ:

```
if (len(A) + len(B & C)) > 30:
    print(N)
    break
```

- 5) Приведем полную программу:
 

```
A = {i for i in range(70, 91)} # множество A
B = {i for i in range(40, 61)} # множество B
C = set() # множество C
for N in range(90):
    C.add(N)
    if (len(A) + len(B & C)) > 30:
        print(N)
        break
```

- 6) Ответ: **49**.

**Решение (программа на Python, Е. Джобс):**

- 1) Полный текст программы:
 

```
# перебираем заведомо больший диапазон чисел
for N in range(10000):
    # если в диапазоне [0; 1000] больше 30 удовлетворяющих чисел
    if sum(
        ((not (70 <= x <= 90)) <= (40 <= x <= 60) ) and
        ((not (0 <= x <= N)) <= (70 <= x <= 90))
        for x in range(1000)
    ) > 30:
        print(N) # печатаем N
        break # завершаем алгоритм
```
- 2) Ответ: **49**.

**Ещё пример задания:**

**P-27.** Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$((x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 64)) \wedge ((x^2 \leq 25) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наименьшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

**Решение:**

- 1) заметим, что здесь два условия объединяются с помощью логической операции «И»:
 
$$(x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 64)$$

$$(x^2 \leq 25) \rightarrow (x \in A)$$
- 2) рассмотрим первое условие; чтобы импликация была истинна, при истинной левой части (посылке) вторая часть (следствие) тоже должна быть истинна
- 3) это значит, что если  $x$  принадлежит отрезку  $A$ , должно выполняться условие  $x^2 \leq 64$ , то есть  $|x| \leq 8$ , поэтому отрезок  $A$  должен целиком содержаться внутри отрезка  $[-8; 8]$
- 4) теперь рассмотрим второе условие: если  $x^2 \leq 25$ , то есть если  $|x| \leq 5$ , то такой  $x$  должен принадлежать отрезку  $A$
- 5) это значит, что весь отрезок  $[-5; 5]$  должен находиться внутри  $A$ , длина этого отрезка – 10.
- 6) Ответ: **10**.

**Ещё пример задания:**

**P-26 (демо-2018).** Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула

$$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

**Решение:**

- 1) заметим, что здесь два условия, которые объединяются с помощью логической операции «И»:
 
$$(x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)$$

$$(y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9)$$
- 2) необходимо, чтобы оба условия были выполнены одновременно; к счастью, первое зависит только от переменной  $x$ , а второе – только от переменной  $y$ , поэтому их можно рассматривать отдельно: каждое из них задает некоторое ограничение на значение  $A$
- 3) рассмотрим первое условие:  $(x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)$ . Для того чтобы импликация была истинной, нужно не допустить варианта  $1 \rightarrow 0$ , то есть при истинной левой части правая часть тоже должна быть истинной.
- 4) это значит, что для всех  $0 \leq x \leq 9$  мы должны обеспечить  $x \cdot x \leq A$ , то есть выбрать  $A \geq x \cdot x$  для все допустимых значений  $x$ . Очевидно, что для этого необходимо и достаточно выбрать  $A \geq 9 \cdot 9 = 81$ . Таким образом, мы определили минимальное допустимое значение  $A = 81$ .
- 5) теперь рассмотрим второе условие:  $(y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9)$ . Чтобы оно было истинно, нужно не допустить варианта  $1 \rightarrow 0$ . Выбором  $A$  мы можем влиять на левую часть, но не на правую. «Угрозу» представляет вариант, когда правая часть ложна, то есть  $y > 9$ . В этом случае нам нужно сделать левую часть ложной, то есть обеспечить выполнение условия  $y \cdot y > A$ .
- 6) для выбора максимального  $A$  возьмем минимальное значение  $y$ , для которого  $y > 9$ . Это даёт условие  $10 \cdot 10 > A$ , откуда следует  $A < 100$
- 7) таким образом, максимально допустимое значение  $A$  равно 99.
- 8) Ответ: **99**.

**Решение (через отрезки, А.Н. Евтеев, Тульская обл.):**

- 1) Если заменить неравенства буквами, то формула в общем виде будет выглядеть так:
 
$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) = 1$$
- 2) Перейдём от импликаций в скобках к логическому сложению, получим:

$$(\neg P + Q) \wedge (\neg R + S) = 1$$

- 3) Поскольку между скобками мы имеем логическое умножение, истинное лишь при истинности обоих сомножителей, можем перейти к системе:

$$\neg P + Q = 1$$

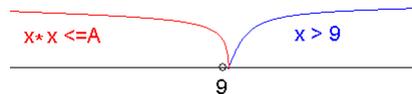
$$\neg R + S = 1$$

- 4) Вернёмся от букв к исходным неравенствам, учитывая инверсию:

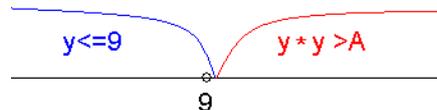
$$(x > 9) + (x \cdot x \leq A) = 1$$

$$(y \cdot y > A) + (y \leq 9) = 1$$

- 5) Перейдём к числовой прямой. Чтобы формула была истинной, каждая записанная выше сумма должна закрывать всю ось. Для первого выражения это будет выглядеть так:



- 6) Интервал от 10 и далее закрывает неравенство  $x > 9$ , а интервал от 0 до 9 включительно закрывает неравенство  $x \cdot x \leq A$ . И поскольку  $x$  на этом интервале не превышает 9, выражение  $x \cdot x \leq A$  будет истинным уже при  $A=81$
- 7) Аналогично для второй суммы:



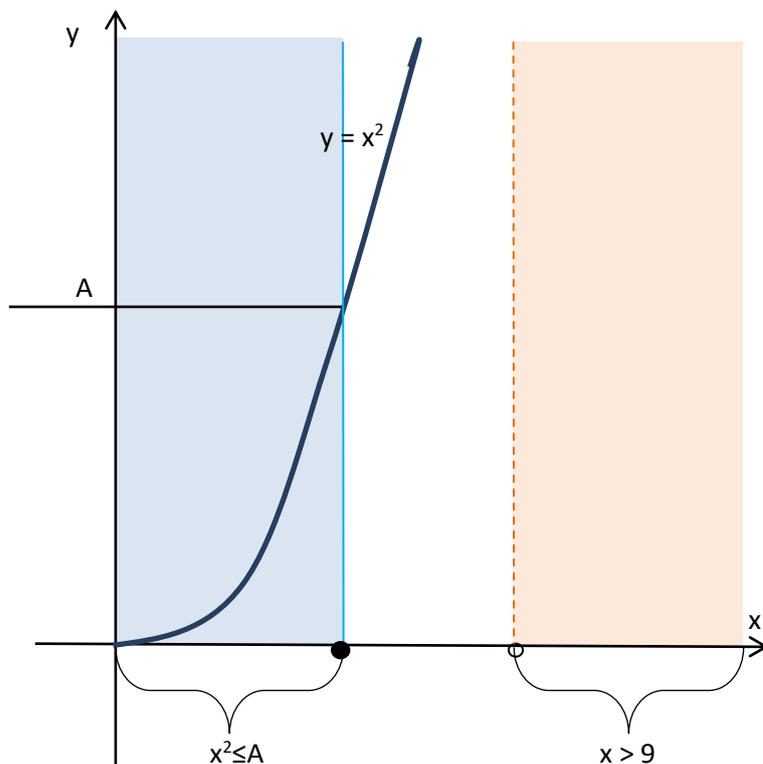
- 8) Интервал от 0 до 9 включительно закрывает неравенство  $y \leq 9$ , а интервал от 10 и далее закроет неравенство  $y \cdot y > A$ . И поскольку значения  $y$  начнутся здесь с 10, а  $y \cdot y = 100$ , то выражение гарантированно будет истинным, если  $A$  будет меньше 100, то есть, не будет превышать 99.
- 9) Ответ: **99**.

**Решение (графическое, О.В. Алимова):**

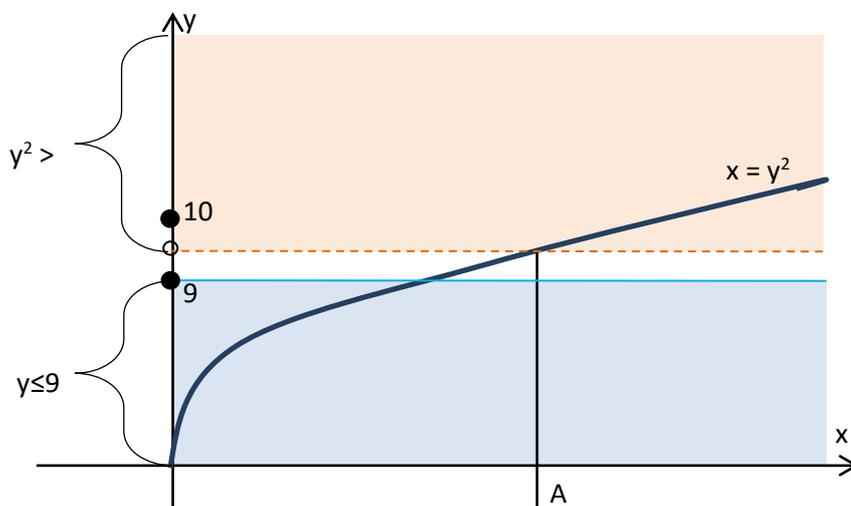
- 1) Перейдем к системе и избавимся от импликации

$$\begin{cases} (x > 9) + (x \cdot x \leq A) = 1 \\ (y \cdot y > A) + (y \leq 9) = 1 \end{cases}$$

- 2) Так как уравнения независимы, то можно рассматривать их отдельно. Согласно условию нас будет интересовать только I четверть.
- 3) Построим множества, удовлетворяющие первому уравнению.
- дизъюнкция – объединение множеств
  - от  $y$  в первом уравнении ничего не зависит, то есть, если для какого-то  $x$  неравенство выполнилось, то оно будет выполняться для этого  $x$  при любом  $y$ , следовательно можем рассматривать области плоскости, а не только отрезки/интервалы на оси  $Ox$
  - для точек правой границы левого прямоугольника условие  $x^2 \leq A$  выполняется
  - для точек левой границы правого прямоугольника условие  $x > 9$  не выполняется



- 4) При увеличении значения  $A$ , ширина левого прямоугольника будет увеличиваться, и при  $A = 81$ , объединение прямоугольников закроет все значения  $x$ . Это наименьшее возможное значение  $A$ . При дальнейшем увеличении  $A$ , будет расти область пересечения прямоугольников, но все значения  $x$ , будут входить в объединение прямоугольников.
- 5) Рассмотрим второе уравнение. Множества удовлетворяющие этому уравнению будут выглядеть так:



- 6) Пока верхний и нижний прямоугольник пересекаются, можем увеличивать  $A$ .
- 7) Значение  $A$  можно увеличивать и дальше, пока в область объединения прямоугольников не перестанет попадать целое значение  $y$ .  $A$  это произойдет при  $A = 100$ , для  $y = 10$  неравенство  $y^2 > A$  перестанет выполняться. Наибольшее значение  $A = 99$ .
- 8) Ответ: **99**.
- 9) **Замечания.** В зависимости от строгости(не строгости) неравенств в исходном уравнении, будут включаться или исключаться точки, лежащие на границе соответствующей области. Так значение  $A$  для уравнения  $(x < 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A) = 1$  будет 64, для уравнения  $(x < 9) \rightarrow (x \cdot x < A) = 1$  будет 65, а для уравнения  $(x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x < A) = 1$  будет 82. Аналогично, во втором уравнении, могут получиться числа 100, 81, 80.

**Решение (М.В. Кузнецова):**

- 1) Заметим, что данная формула содержит конъюнкцию двух импликаций. Конъюнкция истинна только, если оба операнда равны 1, т.е. **обе импликации должны быть равны 1**, для этого надо исключить ситуации  $1 \rightarrow 0$ , переведя их к истинным импликациям  $1 \rightarrow 1$  или  $0 \rightarrow 0$ .
- 2) Дальнейшие рассуждения оформим в таблице.

|                        |                                                                                                  |                    |                                  |                             |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| Формула*               | $((x \leq 9) \rightarrow (A \geq x \cdot x)) \wedge ((A \geq y \cdot y) \rightarrow (y \leq 9))$ |                    |                                  |                             |
| Изменяемое выражение** | -                                                                                                | +                  | +                                | -                           |
| Нельзя допустить       | 1                                                                                                | 0                  | 1                                | 0                           |
| Надо обеспечить        | 1                                                                                                | 1                  | 0                                | 0                           |
| Новые выражения        | $x \leq 9, x \in [0; 9]$                                                                         | $A \geq x \cdot x$ | $A < y \cdot y$                  | $y > 9, y \in [10; \infty)$ |
| Выводы                 | $A \geq 9 \cdot 9, A_{\min} = 81$                                                                |                    | $A < 10 \cdot 10, A_{\max} = 99$ |                             |

Пояснения

\* При переписывании формулы в неравенствах с «А» меняем местами левую и правую часть, т.е. «А» пишем слева.

\*\* Помечаем символом «+» элементы формулы, содержащие «А», изменяя значения которых должны исключить неблагоприятные ситуации.

- 3) Ответ: **99**.

**Решение (программа на Python, А. Носкин):**

- 1) Программа на Python, перебор вариантов:

```

a = [] # список для хранения значений А
for A in range(1, 200):
    k = 1 # флаг
    for x in range(1, 100):
        for y in range(1, 100):
            if ((x <= 9) <= (x * x <= A)) and ((y * y <= A) <= (y <= 9)) == False:
                k = 0 # появился X или Y, при котором ЛОЖЬ
                break
    if k == 1: # все числа X и Y перебрали
        a.append( A )
print( max(a) )

```
- 2) Ответ: **99**.

**Ещё пример задания:**

**Р-25.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& 125 \neq 1) \vee ((x \& 34 = 2) \rightarrow (x \& a = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

**Решение:**

- 1) используя результаты теоретической части, перепишем выражение в виде  $\bar{Z}_{124} + Z_1 + (Z_{32} \cdot \bar{Z}_2 \rightarrow A) = 1$   
где  $Z_{124} = (x \& 124 = 0)$ ,  $Z_1 = (x \& 1 = 0)$ ,  $Z_2 = (x \& 2 = 0)$ ,  $A = (x \& a = 0)$
- 2) раскроем импликацию по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :  
 $\bar{Z}_{124} + Z_1 + \bar{Z}_{32} \cdot \bar{Z}_2 + A = 1$
- 3) применим закон де Моргана  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ :  
 $\bar{Z}_{124} + Z_1 + \bar{Z}_{32} + Z_2 + A = 1$
- 4) перейдём к импликации, в которой нет выражений с инверсиями (операциями «НЕ»):  
 $(\bar{Z}_{124} + \bar{Z}_{32}) + Z_1 + Z_2 + A = 1$

$$\overline{(Z_{124} \cdot Z_{32})} + Z_1 + Z_2 + A = 1$$

$$(Z_{124} \cdot Z_{32}) \rightarrow (Z_1 + Z_2 + A) = 1$$

5) преобразуем левую часть выражения:

$$Z_{124} \cdot Z_{32} = Z_{124 \text{ or } 32} = Z_{124}$$

$$\text{так что } Z_{124} \rightarrow (Z_1 + Z_2 + A) = 1$$

6) используя свойство импликации  $A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$ , получаем

$$Z_{124} \rightarrow (Z_1 + Z_2 + A) = (Z_{124} \rightarrow Z_1) + (Z_{124} \rightarrow Z_2) + (Z_{124} \rightarrow A)$$

7) представим числа в двоичной системе счисления:

$$124 = 1111100_2, 1 = 1_2, 2 = 10_2$$

8) поскольку двоичная запись чисел 1 и 2 содержит единичные биты, которых нет в наборе единичных битов числа 124, имеем

$$Z_{124} \rightarrow Z_1 = 0, Z_{124} \rightarrow Z_2 = 0$$

в том смысле, что найдутся такие значения  $x$ , при которых эти выражения ложны.

9) тогда для истинности заданного выражения остаётся обеспечить истинность  $Z_{124} \rightarrow A$  при всех  $x$ , а это условие будет выполняться тогда и только тогда, когда все единичные биты двоичной записи числа  $a$  входят во множество единичных битов числа  $124 = 1111100_2$ ; таким образом, минимальное подходящее положительное значение  $a - 2^2 = 4$ , а максимальное – 124.

10) Ответ: 4.

**Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):**

1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( x, a ):
    return (x & 125 != 1) or ((x & 34 == 2) <= (x & a == 0))
```

```
for a in range(1, 1000):
    OK = True
    for x in range(1,1000):
        if not f(x, a):
            OK = False
            break
    if OK:
        print( a )
        break
```

2) вариант без функции:

```
for a in range(1, 1000):
    OK = 1
    for x in range(1,1000):
        OK *= (x & 125 != 1) or ((x & 34 == 2) <= (x & a == 0))
        if not OK: break
    if OK:
        print( a )
        break
```

3) Ответ: 4.

### Ещё пример задания:

**P-24.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

**Решение:**

- 1) Введём обозначения:

$$Z_{28} = (x \& 28 = 0), \quad Z_{45} = (x \& 45 = 0), \quad Z_{48} = (x \& 48 = 0), \quad A = (x \& a = 0)$$

- 2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации:

$$(\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}) \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \bar{A}) = \overline{\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}} + (Z_{48} \rightarrow \bar{A}) = Z_{28} \cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A}$$

- 3) перейдем к импликации, используя закон де Моргана:

$$Z_{28} \cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A} = \overline{Z_{48} \cdot A} + Z_{28} \cdot Z_{45} = (Z_{48} \cdot A) \rightarrow Z_{28} \cdot Z_{45}$$

- 4) преобразуем выражение в правой части по формуле  $Z_K \cdot Z_M = Z_{K \text{ or } M}$ , выполнив поразрядную дизъюнкцию (операцию ИЛИ):

$$28 = 011100$$

$$45 = 101101$$

$$28 \text{ or } 45 = 111101 = 61$$

$$\text{получаем } (Z_{48} \cdot A) \rightarrow Z_{61}$$

- 5) для того, чтобы выражение  $(Z_{48} \cdot A) \rightarrow Z_{61}$  было истинно для всех  $x$ , нужно, чтобы двоичная запись числа 48 **or**  $a$  содержала все единичные биты числа 61. Таким образом, с помощью числа  $a$  нужно добавить те единичные биты числа 61, которых «не хватает» в числе 48:

$$48 = 110000$$

$$a = **11*1$$

$$61 = 111101$$

биты, обозначенные звездочками, могут быть любыми.

- 6) поскольку нас интересует минимальное значение  $a$ , все биты, обозначенные звездочкой, можно принять равными нулю.

- 7) получается  $A = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$

- 8) Ответ: **13**.

### Ещё пример задания (М.В. Кузнецова):

**P-23.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \rightarrow ((x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0)) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

#### Решение:

- 1) Введём обозначения:

$$Z_{12} = (X \& 12 = 0), \quad Z_{21} = (X \& 21 = 0), \quad A = (X \& a = 0)$$

- 2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации:

$$\begin{aligned} ((\bar{A} \cdot Z_{12}) \rightarrow (A \cdot \bar{Z}_{21})) + Z_{21} \cdot Z_{12} &= (\overline{\bar{A} \cdot Z_{12}} + A \cdot \bar{Z}_{21}) + Z_{21} \cdot Z_{12} = \\ (A + \bar{Z}_{12} + A \cdot \bar{Z}_{21}) + Z_{21} \cdot Z_{12} \end{aligned}$$

Выражение в первой скобке упрощаем, используя следствие из распределительного закона

$$A + A \cdot B = A$$

$$A + \bar{Z}_{12} + A \cdot \bar{Z}_{21} = A + \bar{Z}_{12}$$

Полученное выражение также можно упростить, используя ещё одно следствие из распределительного закона  $A + \bar{A} \cdot B = A + B$

$$A + \bar{Z}_{12} + Z_{21} \cdot Z_{12} = A + \bar{Z}_{12} + Z_{21}$$

- 3) перейдем к импликации, избавившись от инверсии:

$$A + \bar{Z}_{12} + Z_{21} = Z_{12} \rightarrow (A + Z_{21}) = (Z_{12} \rightarrow A) + (Z_{12} \rightarrow Z_{21})$$

- 4) поскольку множество единичных битов числа  $21 = 10101_2$  не входит во множество единичных битов числа  $12 = 1100_2$ , импликация  $Z_{12} \rightarrow Z_{21}$  ложна для некоторых  $x$ ; поэтому нужно обеспечить истинность выражения  $Z_{12} \rightarrow A$

- 5) выражение  $Z_{12} \rightarrow A$  истинно при условии, что множество единичных битов числа  $a$  входит во множество единичных битов числа 12, поэтому в двоичной записи числа  $a$  ненулевыми могут быть только биты в разрядах 2 и 3
- 6) поэтому  $a_{\max} = 2^3 + 2^2 = 12$ .
- 7) Ответ: **12**.

**Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):**

- 1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( x, a ):
    return ( ((x & a != 0) and (x & 12 == 0)) <= \
            ((x & a == 0) and (x & 21 != 0)) ) or \
            (x & 21 == 0) and (x & 12 == 0)

for a in range(1, 1000):
    OK = True
    for x in range(1,1000):
        if not f(x, a):
            OK = False
            break
    if OK:
        print( a )
```

- 2) вариант без функции:

```
for a in range(1, 1000):
    OK = 1
    for x in range(1,1000):
        OK *= ( ((x & a != 0) and (x & 12 == 0)) <= \
                ((x & a == 0) and (x & 21 != 0)) ) or \
                (x & 21 == 0) and (x & 12 == 0)
        if not OK: break
    if OK:
        print( a )
```

- 3) Ответ: **12**.

**Ещё пример задания:**

**P-22.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите **наименьшее** натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& 49 \neq 0) \rightarrow ((x \& 33 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

**Решение (1 способ):**

- 1) введём обозначения:

$$Z_{49} = (x \& 49 = 0), \quad Z_{33} = (x \& 33 = 0), \quad A = (x \& a = 0)$$

- 2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B \quad \text{и закон де Моргана} \quad \bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B}:$$

$$\bar{Z}_{49} \rightarrow (Z_{33} \rightarrow \bar{A}) = Z_{49} + (Z_{33} \rightarrow \bar{A}) = Z_{49} + \bar{Z}_{33} + \bar{A} = Z_{49} + \overline{Z_{33} \cdot A}$$

- 3) переходим к импликации, избавляясь от инверсий:

$$Z_{49} + \overline{Z_{33} \cdot A} = (Z_{33} \cdot A) \rightarrow Z_{49}$$

- 4) чтобы это выражение было истинным, нужно, чтобы множество единичных битов числа 33 **or**  $a$  перекрывало множество единичных битов числа 49; с помощью  $a$  можно добавить недостающие биты:

$$33 = 100001$$

$$a = *1****$$

$$49 = 110001$$

- 5) чтобы выбрать минимальное  $a$ , биты, обозначенные звездочками, примем равными нулю; получаем число  $10000_2 = 16 = 2^4$ .
- 6) Ответ: **16**.

**Решение (2 способ, Н.Г. Неуймина, г. Екатеринбург):**

- 1) введём обозначения:  
 $P = (X \& 49 \neq 0)$ ,  $Q = (X \& 33 = 0)$ ,  $A = (X \& A \neq 0)$
- 2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации  
 $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$P \rightarrow (Q \rightarrow A) = \bar{P} + (Q \rightarrow A) = \bar{P} + \bar{Q} + A$$

- 3) чтобы формула была тождественно истинной для любых  $X$  необходимо, чтобы при  $\bar{P} + \bar{Q} = 0$  было  $A=1$

- 4) имеем  $\bar{P} + \bar{Q} = 0$  тогда и только тогда, когда  $P = Q = 1$ ;

- 5) посмотрим, какими свойствами должен обладать  $X$  для того, чтобы было  $P = Q = 1$

- 6) если  $Q = 1$ , то есть,  $(X \& 33 = 0)$ , имеем

|            |          |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| номер бита | 5        | 4        | 3        | 2        | 1        | 0        |
|            | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |
|            | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |
|            | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |

это значит, что биты  $\{5, 0\}$  – нулевые

- 7) если одновременно  $P = 1$ , то есть,  $(X \& 49 \neq 0)$ , имеем

|            |          |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| номер бита | 5        | 4        | 3        | 2        | 1        | 0        |
|            | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |
|            | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |
|            | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |

это значит, что бит 4 в  $X$  – обязательно ненулевой

- 8) из 6 и 7 делаем вывод, что для выполнения условия  $A = (X \& A \neq 0) = 1$  необходимо, чтобы, по крайней мере, бит 4 числа  $A$  был ненулевым (так как биты  $\{3,2,1\}$  в  $X$  могут быть нулевыми!)

- 9) поскольку нужно найти наименьшее подходящее  $A$ , получаем ответ  $2^4 = 16$

- 10) Ответ: **16**.

**Решение (3 способ, А.В. Лаздин, НИУ ИТМО):**

- 1) если  $X \& 49 = 0$ , то исходное выражение истинно, независимо от значения числа  $A$ ; значит, значение числа  $A$  влияет на решение задачи только при выполнении условия:

$$1. X \& 49 \neq 0.$$

- 2) тогда исходное выражение может быть представлено в виде:

$$1 \rightarrow ((X \& 33 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0)) \quad (2)$$

- 3) Для того чтобы это выражение было истинным, необходимо, чтобы выражение

$$(X \& 33 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0)$$

было истинным, при этом, если  $X \& 33 \neq 0$ , то это выражение истинно независимо от значения числа  $A$  (импликация из 0 в 1).

- 4) следовательно, значение числа  $A$  влияет на принимаемое исходным выражением значение только при одновременном соблюдении двух условий:

$$1. X \& 49 \neq 0$$

$$2. X \& 33 = 0$$

- 5) исходное выражение принимает следующий вид:

$$1 \rightarrow (1 \rightarrow (X \& A \neq 0)) \quad (3)$$

- 6) для того чтобы это выражение приняло значение 1, необходимо, чтобы выполнилось третье условие:

$$3. X \& A \neq 0.$$

$$49_{10} = 110001_2$$

$$33_{10} = 100001_2$$

$$X \quad \quad 010000$$

- 7) условия 1 и 2 выполняются, если пятый бит числа  $X$  равен 1.

- 8) значит условие № 3 выполняется, если пятый бит числа  $A$  равен 1

- 9) число  $A$  минимально, если младшие разряды этого числа равны 0

10) Ответ: **16**.

**Решение (4 способ, М.В. Кузнецова):**

1) Введём обозначения:

$$P = (X \& 49 \neq 0), \quad Q = (X \& 33 \neq 0), \quad A = (X \& A \neq 0)$$

2) Перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B:$$

$$P \rightarrow (\bar{Q} \rightarrow A) = \bar{P} + (\bar{Q} \rightarrow A) = \bar{P} + Q + A$$

3) Чтобы формула была тождественно истинной для любых  $X$  необходимо, чтобы при  $\bar{P} + Q = 0$  было  $A=1$ , т.е.  $A = \overline{\bar{P} + Q} = P \cdot \bar{Q}$ .

4) Значит,  $A=1$  тогда и только тогда, когда  $P = \bar{Q} = 1$ .

5) Запишем двоичное представление чисел 49 и 33, на их основе составим маски возможных значений числа  $x$ , таких, что  $P = \bar{Q} = 1$ . В маске «1» - соответствует возможному положению 1, «0» - обязательному положению 0 в двоичной записи числа  $x$ .

| Номер бита                                         | 5  | 4  | 3 | 2 | 1 | 0 |
|----------------------------------------------------|----|----|---|---|---|---|
| Вес разряда                                        | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| Двоичная запись 49                                 | 1  | 1  | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Двоичная запись 33                                 | 1  | 0  | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Маска мин. $x$ , для $P=1$ ( $x \& 49 \neq 0$ )    | 1  | 1  | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Маска мин. $x$ , для $\bar{Q}=1$ ( $x \& 33 = 0$ ) | 0  | 1  | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $A = (x \& 49 \neq 0) \text{ and } (x \& 33 = 0)$  | 0  | 1  | 0 | 0 | 0 | 0 |

6) Ответ: **16**.

**Ещё пример задания:**

**P-21.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число  $a$ , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 20 = 0) \rightarrow (x \& 5 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

**Решение:**

1) введём обозначения:

$$Z_{20} = (x \& 20 = 0), \quad Z_5 = (x \& 5 = 0), \quad A = (x \& a = 0)$$

2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B \text{ и закон де Моргана } \overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B:$$

$$\bar{A} \rightarrow (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) = A + (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) = A + \bar{Z}_{20} + \bar{Z}_5 = A + \overline{Z_{20} \cdot Z_5}$$

3) преобразуем это выражение в импликацию, избавившись от инверсии:

$$A + \overline{Z_{20} \cdot Z_5} = (Z_{20} \cdot Z_5) \rightarrow A$$

4) заменим  $Z_{20} \cdot Z_5$  на  $Z_{20 \text{ or } 5}$ :

$$20 = 10100$$

$$5 = 00101$$

$$20 \text{ or } 5 = 10101 = 21$$

5) таким образом, нужно обеспечить истинность выражения  $Z_{21} \rightarrow A$  при всех  $x$

6) это возможно только тогда, когда множество единичных битов числа  $a$  входит во множество единичных битов числа 21

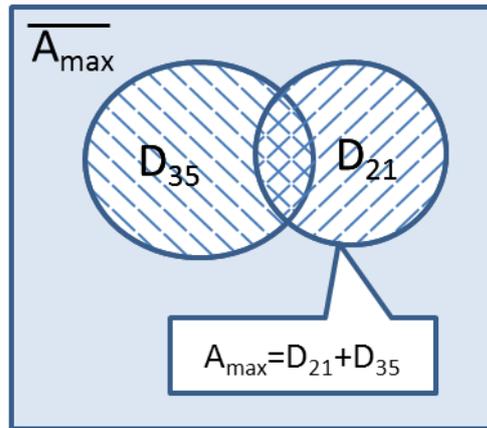
7) поэтому максимальное  $a_{\max} = 10101_2 = 21$

8) Ответ: **21**.

**Решение (2 способ, Н.Г. Неуймина, г. Екатеринбург):**

1) введём обозначения:





Чтобы в множество  $\overline{A}$  входили все числа, не попавшие в объединение  $D_{21} + D_{35}$ , достаточно, чтобы множество  $A$  находилось внутри этого объединения, например, совпадая с одним из множеств  $D_{35}$  или  $D_{21}$ , или располагаясь внутри любого из них, что возможно, если использовать делители, кратные 21 или 35.

- 8) В задании требуется найти НАИМЕНЬШЕЕ значение, этому условию соответствует 21.  
 9) Ответ: **21**

### Ещё пример задания:

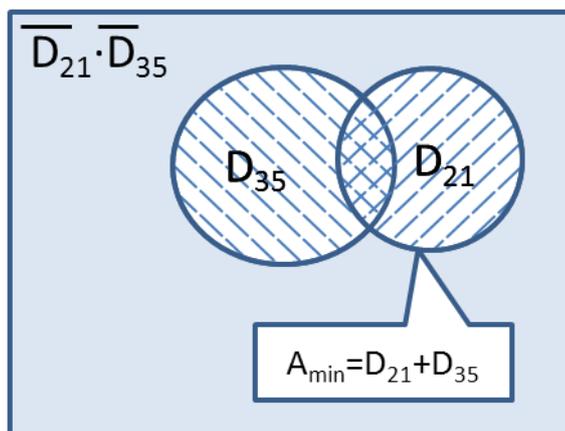
**Р-19 (М.В. Кузнецова).** Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наибольшего** натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

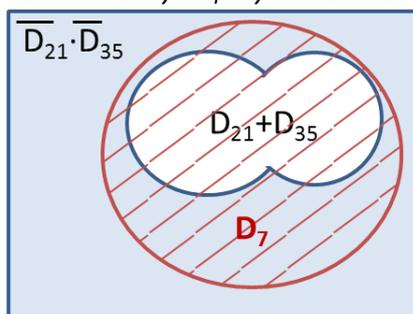
#### Решение:

- 1) введём обозначения  $A = \text{ДЕЛ}(x, A)$ ,  $D_{21} = \text{ДЕЛ}(x, 21)$ ,  $D_{35} = \text{ДЕЛ}(x, 35)$  и  $D_N = \text{ДЕЛ}(x, N)$
- 2) введём множества:  
 $A$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $A$   
 $D_{21}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $D_{21}$   
 $D_{35}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $D_{35}$   
 ...
- 3) Запишем формулу из условия в наших обозначениях  
 $\overline{A} \rightarrow (\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}) = 1$
- 4) Раскроем импликацию по правилу  $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ :  
 $\overline{A} \rightarrow (\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}) = A + \overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}$
- 5) Чтобы формула была тождественно истинной необходимо, чтобы  $A = 1$ , когда  $\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}} = 0$ .  
 Тогда множество  $A$  определяется так:  $A_{\min} = \overline{\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}} = D_{21} + D_{35}$
- 6) Множество  $A_{\min}$ , точно соответствующее выражению с помощью функции  $\text{ДЕЛ}$  получить невозможно.
- 7) Выполним анализ исходной формулы с помощью кругов Эйлера.



в множество  $A$  должны входить все числа, попавшие в объединение  $D_{21} + D_{35}$ . Нужно найти множество, в которое входят оба эти множества. Для этого рассмотрим делители чисел 21 и 35.

- 8) Число 35 делится на 5 и 7, поэтому:  $D_{35} = D_5 \cdot D_7$ , 21 делится на 3 и 7, поэтому:  $D_{21} = D_3 \cdot D_7$   
 9) Перепишем и упростим формулу для  $A$ :  $A_{\min} = D_{21} + D_{35} = D_3 \cdot D_7 + D_5 \cdot D_7 = D_7 \cdot (D_3 + D_5)$   
 10) Таким образом, каждое из множеств  $D_{35}$  и  $D_{21}$  входит в множество  $D_7$ . Объединение  $D_{35} + D_{21}$  тоже входит в  $D_7$ . Поскольку 7 – наибольший общий делитель чисел 21 и 35, то найдено максимальное значение соответствующее условию задачи.



- 11) Ответ: **7**.

### Ещё пример задания:

**P-18.** Пусть  $P$  – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 1,  $Q$  – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, а  $A$  – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество  $A$ , при котором для любой 8-битовой цепочки  $x$  истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in P) \vee (x \in Q))$$

**Решение:**

- 1) введём обозначения  
 $A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$
- 1) перейдем к более простым обозначениям  
 $\bar{A} \rightarrow (\bar{P} + Q)$
- 2) раскрываем импликацию по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :  
 $\bar{A} \rightarrow (\bar{P} + Q) = A + \bar{P} + Q$
- 3) для выполнения условия  $A + \bar{P} + Q = 1$  при любом  $x$  необходимо, чтобы  $A = 1$  для всех  $x$ , для которых  $\bar{P} + Q = 0$ , то есть  $A_{\min} = \overline{\bar{P} + Q} = P \cdot \bar{Q}$
- 4) множество  $P \cdot \bar{Q}$  – это все 8-битовые цепочки, которые начинаются с 1 и оканчиваются НЕ на 000

- 5) поскольку всего битов 8, структура всех таких цепочек имеет вид  $1*****??$ , где  $*$  обозначает любой из двух символов (0 или 1), а  $???$  – трёхбитное окончание, не совпадающее с 000
- 6) всего может быть  $2^3 = 8$  комбинаций из трёх битов, одно из них, 000, запрещено для окончания, поэтому остаётся ещё 7 разрешённых вариантов
- 7) общее количество подходящих цепочек находим по правилам комбинаторики, перемножив количество вариантов для каждой части цепочки (1 для первого бита, по 2 для следующих четырёх и 7 для трёхбитного окончания)  $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 112$
- 8) Ответ: **112**.

**Решение (А.Н. Носкин):**

- 1) упростим исходное выражение и получим:  $A \vee \neg P \vee Q = 1$
- 2) всё множество всех 8-битовых цепочек расположено на отрезке от 0 до 255
- 3) минимальное число множества  $P$  начинающегося с  $10000000_2 = 128$ , следовательно, все множество  $P$  занимает часть отрезка от 128 до 255; длина этой части отрезка равна  $255 - 128 + 1 = 128$ .
- 4)  $Q$  – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, которые имеют вид  $****000$ , где  $*$  обозначает любой из двух символов (0 или 1); количество таких чисел в множестве равно  $2^4 = 16$ , где 4 – число звёздочек в числе  $Q$
- 5) из выражения видно, что множество  $\neg P$  закрывает интервал от 0 до 127, следовательно, множество  $A$  должно перекрыть все числа во множестве  $P$  (таких чисел 128), которые не перекрывают числа из множества  $Q$
- 6) минимальное множество  $A$  содержит  $128 - 16 = 112$  элементов.
- 7) Ответ: **112**.

**Решение (программа на Python, А.Н. Носкин):**

- 1) упростим исходное выражение и получим:  $A \vee \neg P \vee Q = 1$
- 2) всё множество всех 8-битовых цепочек расположено на отрезке от 0 до 255
- 3) минимальное число множества  $P$  начинающегося с  $10000000_2 = 128$ .  
Создадим это множество  $P$ :  
`P = {i for i in range(128, 256)}`
- 4)  $Q$  – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, которые имеют вид  $****000$ , где  $*$  обозначает любой из двух символов (0 или 1); таким образом разность между соседними числами множества равно 8.  
Создадим это множество  $Q$ :  
`Q = {i for i in range(0, 256, 8)}`
- 5) из выражения видно, что множество  $\neg P$  закрывает интервал от 0 до 127, следовательно, множество  $A$  должно перекрыть все числа во множестве  $P$  (таких чисел 128), которые не перекрывают числа из множества  $Q$  это достигается разностью множеств:  $P-Q$   
Тогда  $A$  это количество элементов разности множеств.
- 6) Приведем программу:  
`P = {i for i in range(128, 256)} #множество P  
Q = {i for i in range(0, 256, 8)} #множество Q  
print(len(P-Q))`
- 7) Ответ: **112**.

**Ещё пример задания:**

**P-17.** Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) + \text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

**Решение:**

- 1) введём обозначения  $A = \text{ДЕЛ}(x, A)$ ,  $P = \text{ДЕЛ}(x, 21)$  и  $Q = \text{ДЕЛ}(x, 35)$
- 2) введём множества:

- $\mathbf{A}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $A$   
 $\mathbf{P}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $P$   
 $\mathbf{Q}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $Q$
- 3) истинным для всех  $X$  должно быть выражение  

$$A \rightarrow (\bar{P} + Q)$$
  - 4) упростим это выражение, раскрыв импликацию по правилу  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$  :  

$$A \rightarrow (\bar{P} + Q) = \bar{A} + \bar{P} + Q$$
  - 5) из этой формулы видно, что  $\bar{A}$  может быть равно 0 (и соответственно,  $A$  может быть равно 1) только там, где  $\bar{P} + Q = 1$  ; таким образом, наибольшее возможное множество  $\mathbf{A}$  определяется как  $\mathbf{A}_{\max} = \bar{P} + Q$  – множество всех чисел, которые делятся на 35 плюс множество чисел, которые не делятся на 21;
  - 6) заметим, что в точности такое множество  $\mathbf{A}_{\max}$  нельзя получить с помощью функции **ДЕЛ** никаким выбором  $\mathbf{A}$ ;
  - 7) итак, нам нужно множеством  $\mathbf{A}$  перекрыть все числа, которые делятся на 35, это можно сделать, например, выбрав в качестве  $A$  любой делитель числа  $35 = 5 \cdot 7$
  - 8) в то же время нам нельзя перекрывать числа, которые не делятся на 35, но делятся на  $21 = 3 \cdot 7$  (в этих точках  $\bar{P} + Q = 0$ , и если будет  $A = 1$ , то  $\bar{A} + \bar{P} + Q = 0$ )
  - 9) предположим, что мы выбрали некоторое значение  $A$ ; тогда выражение  $\bar{A}$  ложно в точках  $A \cdot k$ , где  $k$  – натуральное число;
  - 10) если число  $A \cdot k$  делится на 21, то есть  $A \cdot k = 21 \cdot m$  при некотором натуральном числе  $m$ , то такое число должно (для выполнения условия  $\bar{A} + \bar{P} + Q = 1$ ) делиться на 35;
  - 11) раскладываем 21 на простые сомножители:  $21 = 3 \cdot 7$ ; для того, чтобы число  

$$A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$$
делилось на 35, в правой части нужно добавить сомножитель 5, это и есть искомое минимальное значение  $A$  (вообще говоря,  $A$  может быть любым числом, кратным 5)
  - 12) Ответ: **5**.

**Решение (М.В. Кузнецова):**

- 1) Введём обозначения  $A = \text{ДЕЛ}(x, \mathbf{A})$ ,  $D_{21} = \text{ДЕЛ}(x, \mathbf{21})$ ,  $D_{35} = \text{ДЕЛ}(x, \mathbf{35})$  и  $D_N = \text{ДЕЛ}(x, \mathbf{N})$
- 2) Введём множества:  
 $\mathbf{A}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $A$   
 $\mathbf{D}_{21}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $D_{21}$   
 $\mathbf{D}_{35}$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $D_{35}$   
 ...
- 3) Запишем формулу из условия в наших обозначениях  

$$A \rightarrow (\overline{D_{21}} + D_{35}) = 1$$
- 4) Раскроем импликацию по правилу  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$  :  

$$A \rightarrow (\overline{D_{21}} + D_{35}) = \bar{A} + \overline{D_{21}} + D_{35}$$
- 5) Чтобы формула была тождественно истинной необходимо, чтобы  $\bar{A} = 1$  (т.е.  $A=0$ ), когда  $\overline{D_{21}} + D_{35} = 0$ . Тогда наибольшее множество  $\mathbf{A}_{\max}$  определяется как  $\mathbf{A}_{\max} = \overline{\mathbf{D}_{21}} + \mathbf{D}_{35}$
- 6) Множество  $\mathbf{A}_{\max}$ , точно соответствующее выражению с помощью функции **ДЕЛ** получить невозможно. Очевидно, что  $\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{D}_{35}$ , т.е. 35 – наибольшее из чисел, соответствующих условию задачи. Меньшим может быть делитель 35, не являющийся делителем 21.
- 7) Чтобы делитель 35 был решением необходимо, чтобы ни для одного из чисел, кратных ему не выполнялось условие:  $\overline{A_{\max}} = D_{21} \cdot \overline{D_{35}} = 1$ .
- 8) Разложим 35 и 21 на простые множители:  $35 = 5 \cdot 7$ ,  $21 = 3 \cdot 7$ .
- 9) 7 – общий делитель, не может быть решением.
- 10) Проверим 5. Вычислим «опасное» число, принадлежащее множеству  $\mathbf{D}_5 \cdot \mathbf{D}_{21}$ , это  $5 \cdot 21 = 105$ , но  $105 : 35 = 3$  (остаток 0), т.е.  $105 \in \mathbf{D}_{35}$  и для него  $\mathbf{D}_{21} \cdot \overline{\mathbf{D}_{35}} = 0$ , значит 5 соответствует условию задачи.

11) Ответ: **5****Ещё пример задания:**

**P-16.** Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого наибольшего натурального числа **A** формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной **x**)?

**Решение:**

- 1) введём обозначения  $A = \text{ДЕЛ}(x, A)$ ,  $P = \text{ДЕЛ}(x, 6)$  и  $Q = \text{ДЕЛ}(x, 4)$
- 2) введём множества:  
 $A$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $A$   
 $P$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $P$   
 $Q$  – множество натуральных чисел, для которых выполняется условие  $Q$
- 3) истинным для всех  $X$  должно быть выражение  
 $\bar{A} \rightarrow (P \rightarrow \bar{Q})$
- 4) упростим это выражение, раскрыв импликацию по правилу  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$  :  
 $\bar{A} \rightarrow (P \rightarrow \bar{Q}) = A + (P \rightarrow \bar{Q}) = A + \bar{P} + \bar{Q}$
- 5) из этой формулы видно, что множество  $A$  должно перекрыть множество, которое не перекрыто множеством  $\bar{P} + \bar{Q}$ , то есть перекрыть множество  $\overline{\bar{P} + \bar{Q}} = P \cdot Q$
- 6) множество  $P \cdot Q$  – это множество всех чисел, которые делятся одновременно на 4 и 6 (все числа, кратные 4 и 6), то есть, 12, 24, 36 и т.д. (заметим, что 12 – это **наименьшее общее кратное** чисел 4 и 6)
- 7) для того, чтобы перекрыть эти числа, можно выбрать в качестве  $A$  любой делитель числа 12, то есть, 1, 2, 3, 4, 6 или 12; наибольшее из этих чисел – 12.
- 8) Ответ: **12**.

**Ещё пример задания:**

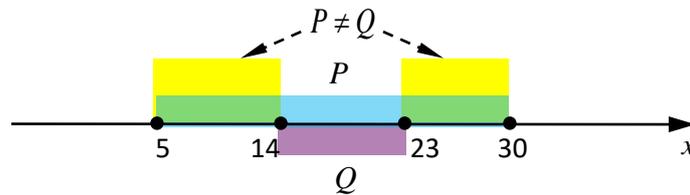
**P-15.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5; 30]$  и  $Q = [14; 23]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

**Решение:**

- 1) Для того чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами  
 $A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$
- 2) перейдем к более простым обозначениям  
 $(P \equiv Q) \rightarrow \bar{A}$
- 3) раскрываем импликацию по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$  :  
 $(P \equiv Q) \rightarrow \bar{A} = \overline{(P \equiv Q)} + \bar{A} = (P \neq Q) + \bar{A}$
- 4) поскольку это выражение должно быть равно 1, то  $\bar{A}$  должно быть истинным (и, следовательно,  $A$  – ложным!) везде, где ложно  $P \neq Q$ ;
- 5) таким образом,  $A$  может быть истинным только там, где истинно  $P \neq Q$
- 6) выражение  $P \neq Q$  истинно на двух интервалах:  $[5; 14)$  и  $(23; 30]$ , которые входят в  $P$  и не входят в  $Q$ , на рисунке они обозначены жёлтым цветом:



- 7) значение  $A$  может быть истинным только внутри этих полуинтервалов, выделенных желтым цветом; но поскольку  $A$  – это отрезок, его наибольшая длина – это длина наибольшего из «жёлтых» полуинтервалов, то есть,  $14 - 5 = 9$  (длина второго полуинтервала равна  $30 - 23 = 7$ ).
- 8) Ответ: **9**.

### Ещё пример задания:

**P-14.** Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{4, 8, 12, 116\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$  истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .  
Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

#### Решение:

- 1) Заметим, что в задаче, кроме множества  $A$ , используются еще два множества:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 3) перейдем к более простым обозначениям

$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P})$$

- 4) раскрываем обе импликации по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} + \bar{P}) = \bar{P} + Q \cdot \bar{A} + \bar{P} = Q \cdot \bar{A} + \bar{P}$$

- 5) теперь используем закон де Моргана  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ :

$$\bar{Q} + A + \bar{P}$$

- 6) поскольку это выражение должно быть равно 1, то  $A$  должно быть истинным везде, где ложно  $\bar{Q} + \bar{P}$

- 7) тогда минимальное допустимое множество  $A$  – это  $A_{\min} = \overline{\bar{Q} + \bar{P}} = Q \cdot P$  (по закону де Моргана)

- 8) переходим ко множествам

$$Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

- 9) тогда  $Q \cdot P$  – это все натуральные числа, которые входят одновременно в  $Q$  и  $P$ ; они выделены жёлтым цветом:  $\{4, 8, 12\}$

- 10) именно эти числа и должны быть «перекрыты» множеством  $A_{\min}$ , поэтому минимальный состав множества  $A$  – это  $A_{\min} = \{4, 8, 12\}$ , сумма этих чисел равна 24

- 11) Ответ: **24**.

#### Решение (с помощью программы, А.Н. Носкин):

- 1) на компьютерном ЕГЭ можно написать программу:

```
P = {2, 4, 6, 8, 10, 12} # множество P
```

```
Q = {4, 8, 12, 116} # множество Q
```

```
A = P & Q # пересечение множеств
```

```
print( sum(list(set(A))) )
```

2) Ответ: 24.

**Решение (3 способ, А.В. Лаздин, НИУ ИТМО):**

1) обозначим множества следующим образом:

$$L = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad M = \{4, 8, 12, 116\}.$$

тогда исходное выражение можно записать в упрощенной форме:

$$(x \in L) \rightarrow (((x \in M) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in L)) \quad (1)$$

2) если  $x$  не принадлежит множеству  $L$ , то выражение принимает значение 1, независимо от множества  $A$  (импликация из 0 всегда равна 1); таким образом, необходимо рассмотреть ситуацию, когда  $x \in L$ .

3) Условие 1.  $x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

В этом случае исходное выражение принимает следующий вид:

$$1 \rightarrow (((x \in M) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow 0) \quad (2)$$

это выражение примет значение 0 только в том случае, если

$((x \in M) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow 0$  будет ложным.

Для этого выражение  $((x \in M) \wedge \neg(x \in A))$  должно быть истинным (импликация из 1 в 0).

4) если  $x$  **не принадлежит** множеству  $M$ , то выражение 2 будет истинным не зависимо от множества  $A$ .

5) таким образом множество  $A$  влияет на решение задачи только при одновременном соблюдении двух условий:

$$1. x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$2. x \in \{4, 8, 12, 116\}$$

В этом случае исходное выражение принимает следующий вид:

$$1 \rightarrow ((1 \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow 0) \quad (3)$$

6) для того чтобы это выражение было истинным, выражение  $\neg(x \in A)$  **обязательно** должно быть ложным; для этого выражение  $x \in A$  должно быть истинным.

7) значит, одновременно должны быть выполнены три условия:

$$1. x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$2. x \in \{4, 8, 12, 116\}$$

$$3. x \in A$$

для этого множеству  $A$  обязательно должны принадлежать числа 4, 8, 12.

8) Ответ: 24.

### Пример задания:

**Р-13.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [37; 60]$  и  $Q = [40; 77]$ . Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

**Решение:**

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

2) перейдем к более простым обозначениям

$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P})$$

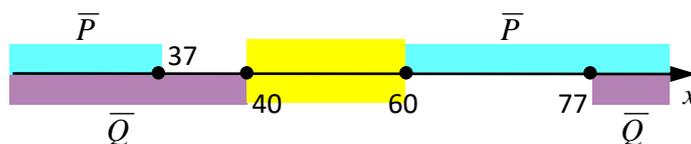
3) раскрываем обе импликации по формуле  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} + \bar{P}) = \bar{P} + Q \cdot \bar{A} + \bar{P} = Q \cdot \bar{A} + \bar{P}$$

4) теперь используем закон де Моргана  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ :

$$\overline{Q} + A + \overline{P}$$

5) в таком виде выражение уже смотрится совсем не страшно; Сразу видно, что отрезок  $A$  должен перекрыть область на числовой оси, которая не входит в область  $\overline{Q} + \overline{P}$ :



6) по рисунку видно, что не перекрыт только отрезок  $[40;60]$  (он выделен жёлтым цветом), его длина – 20, это и есть правильный ответ.

7) Ответ: **20**.

### Ещё пример задания:

**P-12.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 39]$  и  $Q = [23, 58]$ . Выберите из предложенных вариантов такой отрезок  $A$ , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1)  $[5, 20]$       2)  $[15, 35]$       3)  $[25, 45]$       4)  $[5, 65]$

#### Решение:

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

2) перейдем к более простым обозначениям

$$P \cdot A \rightarrow Q \cdot A$$

3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ( $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ ):

$$P \cdot A \rightarrow Q \cdot A = \overline{P \cdot A} + Q \cdot A$$

4) раскроем инверсию первого слагаемого по закону де Моргана ( $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ):

$$\overline{P \cdot A} + Q \cdot A = \overline{P} + \overline{A} + Q \cdot A$$

5) теперь применим закон поглощения

$$A + \overline{A} \cdot B = (A + \overline{A}) \cdot (A + B) = A + B$$

к последним двум слагаемым:

$$\overline{P} + \overline{A} + Q \cdot A = \overline{P} + \overline{A} + Q$$

6) для того, чтобы выражение было истинно при всех  $x$ , нужно, чтобы  $\overline{A}$  было истинно там, где ложно  $\overline{P} + Q$ , то есть там, где истинно  $\overline{\overline{P} + Q} = P \cdot \overline{Q}$  (жёлтая область на рисунке)



7) таким образом,  $A$  должно быть ложно на отрезке  $[10, 23]$ , такое отрезок в предложенном наборе один – это отрезок  $[25, 45]$

8) Ответ: **3**.

### Ещё пример задания:

**P-11.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 30]$  и  $Q = [25, 55]$ . Определите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) 10    2) 20    3) 30    4) 45

#### Решение:

- 1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}: x \in A, \quad \mathbf{P}: x \in P, \quad \mathbf{Q}: x \in Q$$

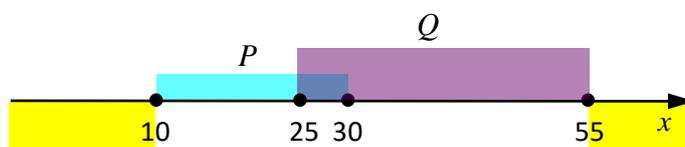
- 2) перейдем к более простым обозначениям

$$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

- 3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ( $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ ):

$$A \rightarrow (P + Q) = \bar{A} + P + Q$$

- 4) для того, чтобы выражение было истинно при всех  $x$ , нужно, чтобы  $\bar{A}$  было истинно там, где ложно  $P + Q$  (жёлтая область на рисунке)



- 5) поэтому максимальный отрезок, где  $A$  может быть истинно (и, соответственно,  $\bar{A}$  ложно) – это отрезок  $[10,55]$ , имеющий длину 45  
6) Ответ: **4**.

#### Ещё пример задания:

**P-10.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10,20]$  и  $Q = [25, 55]$ . Определите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) 10    2) 20    3) 30    4) 45

#### Решение:

- 1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}: x \in A, \quad \mathbf{P}: x \in P, \quad \mathbf{Q}: x \in Q$$

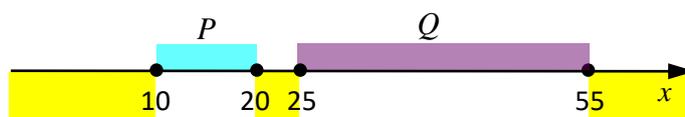
- 2) перейдем к более простым обозначениям

$$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

- 3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ( $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ ):

$$A \rightarrow (P + Q) = \bar{A} + P + Q$$

- 4) для того, чтобы выражение было истинно при всех  $x$ , нужно, чтобы  $\bar{A}$  было истинно там, где ложно  $P + Q$  (жёлтая область на рисунке)



- 5) поскольку области истинности  $P$  и  $Q$  разделены, максимальный отрезок, где  $A$  может быть истинно (и, соответственно,  $\bar{A}$  ложно) – это наибольший из отрезков  $P$  и  $Q$ , то есть отрезок  $[25,55]$ , имеющий длину 30  
6) Ответ: **3**.

**Ещё пример задания:**

**P-09.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [14, 34]$  и  $Q = [24, 44]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [15, 29]      2) [25, 29]      3) [35, 39]      4) [49, 55]

**Решение:**

- 1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

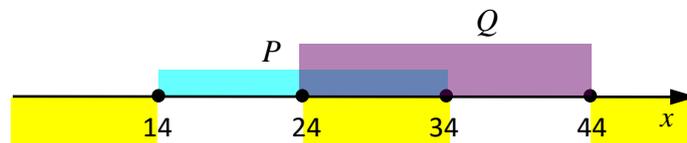
$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 2) перейдем к более простым обозначениям

$$A \rightarrow (P \equiv Q)$$

- 3) выражение  $R = (P \equiv Q)$  истинно для всех значений  $x$ , при которых  $P$  и  $Q$  равны (либо оба ложны, либо оба истинны)

- 4) нарисуем область истинности выражения  $R = (P \equiv Q)$  на числовой оси (жёлтые области)



- 5) импликация  $A \rightarrow R$  истинна за исключением случая, когда  $A=1$  и  $R=0$ , поэтому на полуотрезках  $[14, 24[$  и  $]34, 44]$ , где  $R=0$ , выражение  $A$  должно быть обязательно ложно; никаких других ограничений не накладывается
- 6) из предложенных ответов этому условию соответствуют отрезки  $[25, 29]$  и  $[49, 55]$ ; по условию из них нужно выбрать самый длинный
- 7) отрезок  $[25, 29]$  имеет длину 4, а отрезок  $[49, 55]$  – длину 6, поэтому выбираем отрезок  $[49, 55]$
- 8) Ответ: **4**.

**Ещё пример задания:**

**P-08.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 50]$  и  $Q = [10, 60]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [5, 40]      2) [15, 54]      3) [30, 58]      4) [5, 70]

**Решение:**

- 1) в этом выражении две импликации связаны с помощью операции И (конъюнкции), поэтому для истинности всего выражения обе импликации должны быть истинными

- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 3) перейдем к более простым обозначениям в обоих условиях

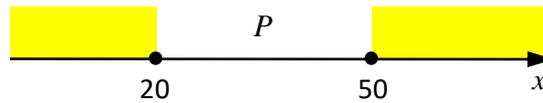
$$(P \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow Q)$$

и выразим импликацию через операции ИЛИ и НЕ:

$$Z_1 = P \rightarrow A = \bar{P} + A,$$

$$Z_2 = A \rightarrow Q = \bar{A} + Q$$

- 4) выражение  $\bar{P} + A$  должно быть истинно на всей числовой оси; обозначим область, которую перекрывает выражение  $\bar{P}$  – это две полуоси



- 5) отсюда следует, что отрезок  $A$  должен полностью перекрывать отрезок  $P$ ; этому условию удовлетворяют варианты ответов **2 и 4**
- 6) выражение  $\bar{A} + Q$  тоже должно быть истинно на всей числовой оси; выражение  $\bar{A}$  должно перекрывать все, кроме отрезка, который перекрывает выражение  $Q$ :



- 7) поэтому начало отрезка  $A$  должно быть внутри отрезка  $[10,20]$ , а его конец – внутри отрезка  $[50,60]$
- 8) этим условиям удовлетворяет только вариант 2.
- 9) Ответ: **2**.

### Ещё пример задания:

**P-07.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [35, 55]$  и  $Q = [45, 65]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что обе приведённые ниже формулы истинны при любом значении переменной  $x$ :

$$(x \in P) \rightarrow (x \in A)$$

$$(\neg(x \in A)) \rightarrow (\neg(x \in Q))$$

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1)  $[40,50]$       2)  $[30,60]$       3)  $[30,70]$       4)  $[40, 100]$

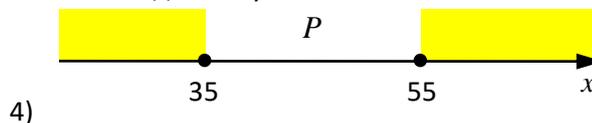
#### Решение:

- 1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}: x \in A, \quad \mathbf{P}: x \in P, \quad \mathbf{Q}: x \in Q$$

- 2) перейдем к более простым обозначениям в первом условии  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}$  и выразим импликацию через операции ИЛИ и НЕ:  $Z_1 = P \rightarrow A = \bar{P} + A$

- 3) выражение  $\bar{P} + A$  должно быть истинно на всей числовой оси; обозначим область, которую перекрывает выражение  $\bar{P}$  – это две полуоси



- 4) отсюда следует, что отрезок  $A$  должен полностью перекрывать отрезок  $P$ ; этому условию удовлетворяют варианты ответов **2 и 3**

- 6) аналогично разбираем и преобразуем второе выражение

$$Z_2 = \bar{A} \rightarrow Q = A + \bar{Q}$$

- 7) и находим, что для того, чтобы обеспечить истинность второго выражения на всей оси отрезок  $A$  должен полностью перекрыть отрезок  $Q$ ; этому условию удовлетворяют варианты ответов **3 и 4**

- 8) объединяя результаты п. 5 и 7, получаем, что условию задачи соответствует только отрезок 3.

- 9) Ответ: **3**.

**Ещё пример задания:**

**Р-06.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [2, 10]$  и  $Q = [6, 14]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

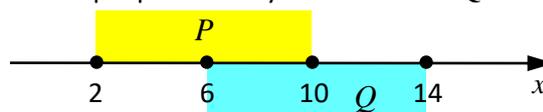
$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1)  $[0, 3]$       2)  $[3, 11]$       3)  $[11, 15]$       4)  $[15, 17]$

**Решение:**

- два условия связаны с помощью операции  $\vee$  («ИЛИ»), поэтому должно выполняться хотя бы одно из них
- для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами  
 $A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$
- тогда получаем, переходя к более простым обозначениям:  
 $Z = (A \rightarrow P) + Q$
- представим импликацию  $A \rightarrow P$  через операции «ИЛИ» и «НЕ»:  $A \rightarrow P = \bar{A} + P$ , так что получаем  $Z = \bar{A} + P + Q$
- это значит, что для тождественной истинности выражения  $Z$  нужно, чтобы для любого  $x$  было выполнено одно из условий:  $\bar{A}, P, Q$ ; из всех этих выражений нам **неизвестно только  $\bar{A}$**
- посмотрим, какие интервалы перекрываются условиями  $P$  и  $Q$ :



- видим, что отрезок  $[2, 14]$  перекрывает, поэтому выражение  $\bar{A}$  должно перекрывать оставшуюся часть; таким образом,  $\bar{A}$  должно быть истинно на интервалах  $(-\infty, 2)$  и  $(14, \infty)$  и, соответственно, выражение  $A$  (без инверсии) может быть истинно только внутри отрезка  $[2, 14]$
- из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок  $[3, 11]$  (вариант 2) находится целиком внутри отрезка  $[2, 14]$ , это и есть правильный ответ
- Ответ: **2**.

**Решение (вариант 2, А.Н. Евтеев):**

- пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
- полученное после преобразований выражение  $Z = \bar{A} + P + Q$  должно быть истинно при любом  $x$
- логическая сумма истинна во всех случаях кроме одного: если все слагаемые ложны, следовательно выражение  $Z = \bar{A} + P + Q$  ложно только когда  $A = 1, P = 0$  и  $Q = 0$
- поэтому если область истинности  $A$  выйдет за пределы отрезка  $[2, 14]$ , где одновременно ложны  $P$  и  $Q$ , то  $Z = \bar{A} + P + Q$  будет ложно
- это значит, что  $A$  может быть истинно только внутри отрезка  $[2, 14]$
- из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок  $[3, 11]$  (вариант 2) находится целиком внутри отрезка  $[2, 14]$ , это и есть правильный ответ
- Ответ: **2**.

**Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):**

- пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
- если рассматривать все значения  $x$  на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков

- 3) эти точки (2,6,10 и 14) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения  $Y = P + Q$

| $x$           | $P$ | $Q$ | $Y = P + Q$ |
|---------------|-----|-----|-------------|
| $x < 2$       | 0   | 0   | 0           |
| $2 < x < 6$   | 1   | 0   | 1           |
| $6 < x < 10$  | 1   | 1   | 1           |
| $10 < x < 14$ | 0   | 1   | 1           |
| $x > 14$      | 0   | 0   | 0           |

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение  $Z = \bar{A} + P + Q$  должно быть равно 1 при любых значениях  $x$ , то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение  $\bar{A}$  (и соответствующее значение  $A$ ) для каждого интервала:

| $x$           | $P$ | $Q$ | $Y = P + Q$ | $\bar{A}$ | $A$   | $Z = \bar{A} + P + Q$ |
|---------------|-----|-----|-------------|-----------|-------|-----------------------|
| $x < 2$       | 0   | 0   | 0           | 1         | 0     | 1                     |
| $2 < x < 6$   | 1   | 0   | 1           | любое     | любое | 1                     |
| $6 < x < 10$  | 1   | 1   | 1           | любое     | любое | 1                     |
| $10 < x < 14$ | 0   | 1   | 1           | любое     | любое | 1                     |
| $x > 14$      | 0   | 0   | 0           | 1         | 0     | 1                     |

- 5) таким образом, значение  $A$  должно быть равно 0 вне отрезка  $[2,14]$ ; из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок  $[3,11]$  (вариант 2)
- 6) Ответ: **2**.

### Ещё пример задания:

**P-05.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [2, 20]$  и  $Q = [15, 25]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1)  $[0, 15]$       2)  $[10, 25]$       3)  $[2, 10]$       4)  $[15, 20]$

### Решение (отрезки на оси):

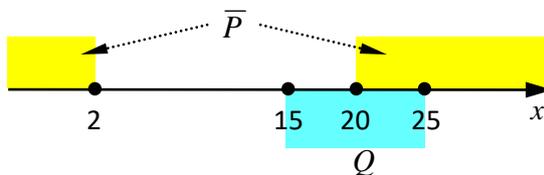
- 1) два условия связаны с помощью операции  $\vee$  («ИЛИ»), поэтому должно выполняться хотя бы одно из них
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 3) учтем, что в формуле используется знак  $\notin$  («не принадлежит»), поэтому при переходе к более простым обозначениям получаем:

$$Z = (\bar{A} \rightarrow \bar{P}) + Q$$

- 4) представим импликацию  $\bar{A} \rightarrow \bar{P}$  через операции «ИЛИ» и «НЕ»:  $\bar{A} \rightarrow \bar{P} = A + \bar{P}$ , так что получаем  $Z = A + \bar{P} + Q$
- 5) это значит, что для тождественной истинности выражения  $Z$  нужно, чтобы для любого  $x$  было выполнено одно из условий:  $A$ ,  $\bar{P}$ ,  $Q$ ; из всех этих выражений нам **неизвестно только  $A$**
- 6) посмотрим, какие интервалы перекрываются условиями  $\bar{P}$  и  $Q$ ; область  $\bar{P}$  состоит из двух участков числовой оси, которые не входят в отрезок  $[2,20]$ , а область  $Q$  – это отрезок  $[15,25]$ :



- 7) таким образом, область истинности выражения  $A$  должна перекрывать оставшуюся часть – отрезок  $[2,15]$
- 8) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок  $[0,15]$  (вариант 1) полностью перекрывает отрезок  $[2,15]$ , это и есть правильный ответ
- 9) Ответ: **1**.

**Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):**

- 1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
- 2) если рассматривать все значения  $x$  на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- 3) эти точки (2,15,20 и 25) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения  $Y = \bar{P} + Q$

| $x$           | $P$ | $\bar{P}$ | $Q$ | $Y = \bar{P} + Q$ |
|---------------|-----|-----------|-----|-------------------|
| $x < 2$       | 0   | 1         | 0   | 1                 |
| $2 < x < 15$  | 1   | 0         | 0   | 0                 |
| $15 < x < 20$ | 1   | 0         | 1   | 1                 |
| $20 < x < 25$ | 0   | 1         | 1   | 1                 |
| $x > 25$      | 0   | 1         | 0   | 1                 |

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение  $Z = A + \bar{P} + Q$  должно быть равно 1 при любых значениях  $x$ , то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение  $A$  для каждого интервала:

| $x$           | $P$ | $\bar{P}$ | $Q$ | $Y = \bar{P} + Q$ | $A$   | $Z = A + \bar{P} + Q$ |
|---------------|-----|-----------|-----|-------------------|-------|-----------------------|
| $x < 2$       | 0   | 1         | 0   | 1                 | любое | 1                     |
| $2 < x < 15$  | 1   | 0         | 0   | 0                 | 1     | 1                     |
| $15 < x < 20$ | 1   | 0         | 1   | 1                 | любое | 1                     |
| $20 < x < 25$ | 0   | 1         | 1   | 1                 | любое | 1                     |
| $x > 25$      | 0   | 1         | 0   | 1                 | любое | 1                     |

- 5) таким образом, область истинности выражения  $A$  должна перекрывать отрезок  $[2,15]$
- 6) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок  $[0,15]$  (вариант 1) полностью перекрывает отрезок  $[2,15]$ , это и есть правильный ответ
- 7) Ответ: **1**.

**Ещё пример задания:**

**Р-04.** На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10, 25]$ ,  $Q = [15, 30]$  и  $R = [25, 40]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in Q) \rightarrow (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$$

тождественно **ложна**, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

- 1)  $[0, 15]$       2)  $[10, 40]$       3)  $[25, 35]$       4)  $[15, 25]$

**Решение (способ 1):**

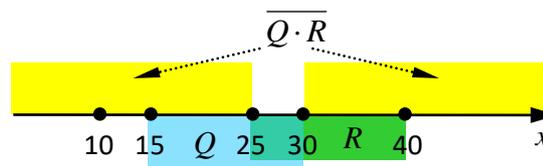
- 1) три условия связаны с помощью операции  $\wedge$  (логическое «И»), поэтому для того, чтобы выражение было тождественно равно нулю, для каждого значения  $x$  по крайней мере одно из них должно быть ложно
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}: x \in A, \quad \mathbf{P}: x \in P, \quad \mathbf{Q}: x \in Q, \quad \mathbf{R}: x \in R$$

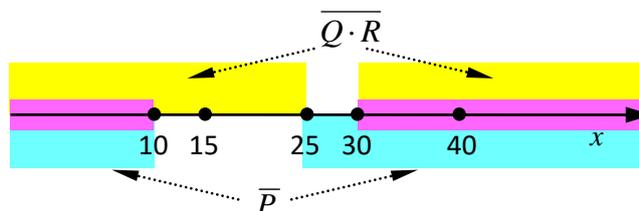
- 3) учтем, что в формуле дважды используется знак  $\notin$  («не принадлежит»), поэтому при переходе к более простым обозначениям получаем:

$$Z = (Q \rightarrow \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$$

- 4) представим импликацию  $Q \rightarrow \bar{R}$  через операции «ИЛИ» и «НЕ»:  $Q \rightarrow \bar{R} = \bar{Q} + \bar{R}$ , так что получаем  $Z = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$
- 5) роль множителя  $\mathbf{A}$  состоит в том, чтобы обнулить выражение везде, где произведение  $(\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$  равно 1; поэтому для этих значений  $x$  выражение  $\mathbf{A}$  должно быть равно нулю, а для остальных  $x$  его значение не играет роли
- 6) область истинности выражения  $\bar{Q} + \bar{R}$  по закону де Моргана совпадает с областью истинности выражения  $\overline{Q \cdot R}$ , то есть это область вне общей части отрезков  $Q$  и  $R$  (она показана жёлтым цветом на рисунке):



- 7) теперь умножим это выражение на  $\bar{P}$  (ему соответствует область вне отрезка  $[10,25]$ ), построив область  $(\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$ ; эта область, где одновременно истинны  $\bar{Q} + \bar{R}$  и  $\bar{P}$ , выделена фиолетовым цветом:



- 8) как следует из п. 4, в фиолетовой области на предыдущем рисунке выражение  $\mathbf{A}$  должно быть обязательно равно 0, и только внутри отрезка  $[10,30]$  может быть истинно
- 9) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка  $[10,30]$
- 10) этому условию удовлетворяет только отрезок  $[15,25]$  (ответ 4)
- 11) Ответ: 4.

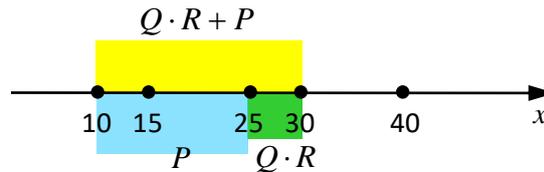
#### Решение (способ 2, инверсия и преобразование):

- 1) пп. 1-4 такие же, как и в первом способе
- 2) выражение  $Z$  тождественно ложно тогда и только тогда, когда обратное ему,  $\bar{Z}$ , тождественно истинно; таким образом, если выполнить инверсию для  $Z$ , мы сведём задачу к задаче из демо-варианта ЕГЭ-2013, разобранной выше
- 3) имеем, используя законы де Моргана:

$$\bar{Z} = \overline{(\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}} = \overline{(\bar{Q} + \bar{R})} + \overline{A \cdot \bar{P}} = Q \cdot R + \bar{A} + P$$

- 4) выражение  $Q \cdot R$  истинно на общей части (пересечении) отрезков  $Q$  и  $R$ , то есть, на отрезке  $[25,30]$

- 5) добавляя к этому диапазону отрезок  $P$ , получим отрезок  $[10,30]$ , где истинно выражение  $Q \cdot R + P$



- 6) остальную часть числовой оси (при  $x$  меньше 10 и  $x$  больше 30) должно перекрыть выражение  $\bar{A}$ , то есть  $A$  должно быть ложно вне отрезка  $[10,30]$
- 7) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка  $[10,30]$
- 8) этому условию удовлетворяет только отрезок  $[15,25]$  (ответ 4)
- 9) Ответ: 4.

**Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):**

- 1) пп. 1-5 такие же, как и в первом способе решения
- 2) если рассматривать все значения  $x$  на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- 3) эти точки (10,15,25, 30 и 40) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения  $Y = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$

| $x$           | $P$ | $\bar{P}$ | $Q$ | $\bar{Q}$ | $R$ | $\bar{R}$ | $\bar{Q} + \bar{R}$ | $Y = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$ |
|---------------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|---------------------|-----------------------------------------|
| $x < 10$      | 0   | 1         | 0   | 1         | 0   | 1         | 1                   | 1                                       |
| $10 < x < 15$ | 1   | 0         | 0   | 1         | 0   | 1         | 1                   | 0                                       |
| $15 < x < 25$ | 1   | 0         | 1   | 0         | 0   | 1         | 1                   | 0                                       |
| $25 < x < 30$ | 0   | 1         | 1   | 0         | 1   | 0         | 0                   | 0                                       |
| $30 < x < 40$ | 0   | 1         | 0   | 1         | 1   | 0         | 1                   | 1                                       |
| $x > 40$      | 0   | 1         | 0   | 1         | 0   | 1         | 1                   | 1                                       |

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение  $Z = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$  должно быть равно 0 при любых значениях  $x$ , то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение  $A$  для каждого интервала:

| $x$           | $Y = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$ | $A$   | $Z = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$ |
|---------------|-----------------------------------------|-------|-------------------------------------------------|
| $x < 10$      | 1                                       | 0     | 0                                               |
| $10 < x < 15$ | 0                                       | любое | 0                                               |
| $15 < x < 25$ | 0                                       | любое | 0                                               |
| $25 < x < 30$ | 0                                       | любое | 0                                               |
| $30 < x < 40$ | 1                                       | 0     | 0                                               |
| $x > 40$      | 1                                       | 0     | 0                                               |

- 1) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка  $[10,30]$
- 2) этому условию удовлетворяет только отрезок  $[15,25]$  (ответ 4)
- 3) Ответ: 4.

**Ещё пример задания:**

**Р-03.** На числовой прямой даны три интервала:  $P = (5, 10)$ ,  $Q = [10, 20]$  и  $R = [25, 40]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что выражения

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно **равны**, то есть принимают одинаковые значения при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [7, 20]      2) [2, 12]      3) [10,25]      4) [20, 30]

**Решение (способ 1, отрезки на числовой прямой):**

- 1) обратите внимание, что интервал  $P$  – это открытый интервал; это необходимо для того, чтобы можно было выполнить заданное условие в точках стыковки отрезков
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}: x \in A, \quad \mathbf{P}: x \in P, \quad \mathbf{Q}: x \in Q, \quad \mathbf{R}: x \in R$$

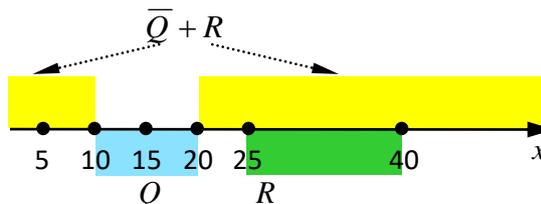
- 3) перейдём к более простым обозначениям:

$$Y = A \rightarrow P, \quad Z = Q \rightarrow R$$

- 4) выразим импликации через операции «ИЛИ» и «НЕ»:

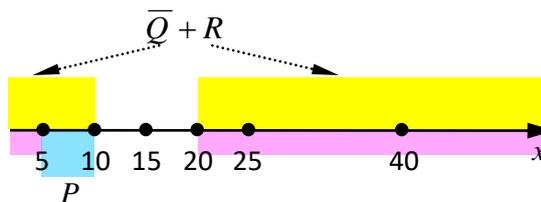
$$Y = A \rightarrow P = \bar{A} + P, \quad Z = Q \rightarrow R = \bar{Q} + R$$

- 5) заметим, что неизвестная величина  $A$  входит только в выражение  $Y$
- 6) общая идея состоит в том, чтобы построить на числовой оси область истинности для полностью известного выражения  $Z = \bar{Q} + R$ , а затем дополнить отрезок  $P$  до этой области; это «дополнение» будет соответствовать области  $\bar{A}$
- 7) построим область  $Z = \bar{Q} + R$  – объединение отрезка  $R$  и области вне отрезка  $Q$ :



обратим внимание, что область  $Z = \bar{Q} + R$  (выделена жёлтым цветом) в данном случае совпадает с  $\bar{Q}$

- 8) теперь рассмотрим область  $P$  (выделена голубым цветом)



- 9) чтобы область истинности выражения  $Y = \bar{A} + P$  совпала с жёлтой областью, выражение  $\bar{A}$  должно «перекрыть» всю фиолетовую область (возможно, заходя в область  $P$ )
- 10) поэтому выражение  $A$  обязательно должно быть истинно на отрезке [10,20]; обязательно должно быть ложно на полуосях  $(-\infty, 5)$  и  $(20, +\infty)$ , а на отрезке [5,10] его значение может быть любым (там выполнение требований обеспечивает область  $P$ )
- 11) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [7,20] (ответ 1)
- 12) Ответ: **1**.

**Решение (способ 2, таблицы истинности, Е.А. Смирнов):**

- 1) пп. 1-6 такие же, как и в первом способе решения
- 2) если рассматривать все значения  $x$  на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков

- 3) эти точки (5, 10, 20, 25 и 40) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения  $Z = \bar{Q} + R$

| x             | P | Q | $\bar{Q}$ | R | $Z = \bar{Q} + R$ |
|---------------|---|---|-----------|---|-------------------|
| $x < 5$       | 0 | 0 | 1         | 0 | 1                 |
| $5 < x < 10$  | 1 | 0 | 1         | 0 | 1                 |
| $10 < x < 20$ | 0 | 1 | 0         | 0 | 0                 |
| $20 < x < 25$ | 0 | 0 | 1         | 0 | 1                 |
| $25 < x < 40$ | 0 | 0 | 1         | 1 | 1                 |
| $x > 40$      | 0 | 0 | 1         | 0 | 1                 |

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение  $Z = \bar{Q} + R$  должно быть равно выражению  $Y = \bar{A} + P$  при любых значениях  $x$ , отсюда можно найти, каким должно быть значение  $\bar{A}$  (и соответствующее значение  $A$ ) для каждого интервала:

| x             | $Z = \bar{Q} + R$ | $Y = \bar{A} + P$ | P | $\bar{A}$ | A     |
|---------------|-------------------|-------------------|---|-----------|-------|
| $x < 5$       | 1                 | 1                 | 0 | 1         | 0     |
| $5 < x < 10$  | 1                 | 1                 | 1 | любое     | любое |
| $10 < x < 20$ | 0                 | 0                 | 0 | 0         | 1     |
| $20 < x < 25$ | 1                 | 1                 | 0 | 1         | 0     |
| $25 < x < 40$ | 1                 | 1                 | 0 | 1         | 0     |
| $x > 40$      | 1                 | 1                 | 0 | 1         | 0     |

- 4) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который перекрывает отрезок [10,20] и, возможно, заходит внутрь отрезка [5,10]
- 5) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [7,20] (ответ 1)
- 6) Ответ: **1**.

### Ещё пример задания:

**P-02.** На числовой прямой даны три интервала:  $P = (10, 15)$ ,  $Q = [5, 20]$  и  $R = [15, 25]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что выражения

$$(x \notin A) \rightarrow (x \in P) \text{ и } (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

принимают **различные** значения при любых  $x$ .

- 1) [7, 20]      2) [2, 15]      3) [5,12]      4) [20, 25]

#### Решение (способ 1, отрезки на числовой прямой):

- 1) обратите внимание, что интервал  $P$  – это открытый интервал; это необходимо для того, чтобы можно было выполнить заданное условие в точках стыковки отрезков
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}: x \in A, \quad \mathbf{P}: x \in P, \quad \mathbf{Q}: x \in Q, \quad \mathbf{R}: x \in R$$

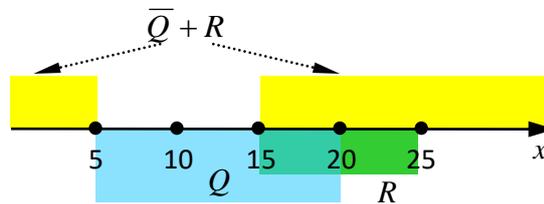
- 3) перейдём к более простым обозначениям:

$$Y = \bar{A} \rightarrow P, \quad Z = Q \rightarrow R$$

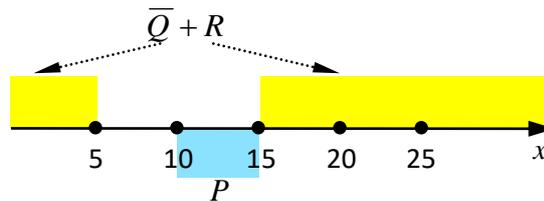
- 4) выразим импликации через операции «ИЛИ» и «НЕ»:

$$Y = \bar{A} \rightarrow P = A + P, \quad Z = Q \rightarrow R = \bar{Q} + R$$

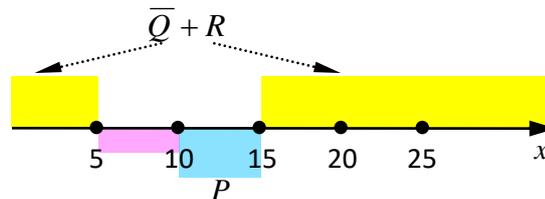
- 5) заметим, что неизвестная величина  $A$  входит только в выражение  $Y$
- 6) общая идея состоит в том, чтобы построить на числовой оси область истинности для полностью известного выражения  $Z = \bar{Q} + R$ , а затем дополнить отрезок  $R$  до «обратной» области, в которой выражение  $Z$  ложно; это «дополнение» будет соответствовать области  $A$
- 7) построим область  $Z = \bar{Q} + R$  – объединение отрезка  $R$  и области вне отрезка  $Q$ :



- 8) теперь рассмотрим область  $P$  (выделена голубым цветом)



- 9) чтобы выполнить заданное условие (противоположность значений  $Y = A + P$  и  $Z = \bar{Q} + R$  при любых  $x$ ), область истинности выражения  $Y = A + P$  должна совпадать с областью, где выражение  $Z$  ложно; для этого выражение  $A$  должно «перекрывать» всю фиолетовую область (возможно, заходя в область  $P$ ), но не должно заходить в «жёлтую» область:



- 10) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок  $[5,12]$  (ответ 3)
- 11) Ответ: 3.

**Решение (способ 2, таблицы истинности, Е.А. Смирнов):**

- пп. 1-6 такие же, как и в первом способе решения
- если рассматривать все значения  $x$  на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- эти точки (5, 10, 15, 20 и 25) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения  $Z = \bar{Q} + R$

| $x$           | $P$ | $Q$ | $\bar{Q}$ | $R$ | $Z = \bar{Q} + R$ |
|---------------|-----|-----|-----------|-----|-------------------|
| $x < 5$       | 0   | 0   | 1         | 0   |                   |
| $5 < x < 10$  | 0   | 1   | 0         | 0   |                   |
| $10 < x < 15$ | 1   | 1   | 0         | 0   |                   |
| $15 < x < 20$ | 0   | 1   | 0         | 1   |                   |
| $20 < x < 25$ | 0   | 0   | 1         | 1   |                   |
| $x > 25$      | 0   | 0   | 1         | 0   |                   |

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- по условию выражение  $Z = \bar{Q} + R$  должно быть НЕ равно выражению  $Y = A + P$  при любых значениях  $x$ , отсюда можно найти, каким должно быть значение  $A$  для каждого интервала:

| $x$           | $Z = \overline{Q} + R$ | $Y = A + P$ | $P$ | $A$   |
|---------------|------------------------|-------------|-----|-------|
| $x < 5$       | 1                      | 0           | 0   | 0     |
| $5 < x < 10$  | 0                      | 1           | 0   | 1     |
| $10 < x < 15$ | 0                      | 1           | 1   | любое |
| $15 < x < 20$ | 1                      | 0           | 0   | 0     |
| $20 < x < 25$ | 1                      | 0           | 0   | 0     |
| $x > 25$      | 1                      | 0           | 0   | 0     |

- 7) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который перекрывает отрезок [5,10] и, возможно, заходит внутрь отрезка [10,15]
- 8) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [5,12] (ответ 3)
- 9) Ответ: **3**.

### Ещё пример задания:

**P-01.** Какое из приведённых имен удовлетворяет логическому условию:

(первая буква согласная  $\rightarrow$  вторая буква согласная)  $\wedge$  (предпоследняя буква гласная  $\rightarrow$  последняя буква гласная)?

- 1) КРИСТИНА    2) МАКСИМ    3) СТЕПАН    4) МАРИЯ

#### Решение:

- два условия связаны с помощью операции  $\wedge$  («И»), поэтому должны выполняться одновременно
- импликация ложна, если ее первая часть («посылка») истинна, а вторая («следствие») – ложна
- первое условие «первая буква согласная  $\rightarrow$  вторая буква согласная» ложно тогда, когда первая буква согласная, а вторая – гласная, то есть для ответов 2 и 4
- второе условие «предпоследняя буква гласная  $\rightarrow$  последняя буква гласная» ложно тогда, когда предпоследняя буква гласная, а последняя – согласная, то есть, для ответа 3
- таким образом, для варианта 1 (КРИСТИНА) оба промежуточных условия и исходное условие в целом истинны
- ответ: **1**.

### Ещё пример задания:

**P-00.** Для какого из указанных значений  $X$  истинно высказывание  $\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$ ?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

#### Решение (вариант 1, прямая подстановка):

- определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках
- выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); сначала определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:

| $x$ | $x > 2$ | $x > 3$ | $(x > 2) \rightarrow (x > 3)$ | $\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$ |
|-----|---------|---------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1   | 0       | 0       |                               |                                     |
| 2   | 0       | 0       |                               |                                     |
| 3   | 1       | 0       |                               |                                     |
| 4   | 1       | 1       |                               |                                     |

- 3) по таблице истинности операции «импликация» находим третий столбец (значение выражения в больших скобках), применив операцию «импликация» к значениям второго и третьего столбцов (в каждой строке):

| $x$ | $x > 2$ | $x > 3$ | $(x > 2) \rightarrow (x > 3)$ | $\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$ |
|-----|---------|---------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1   | 0       | 0       | 1                             |                                     |
| 2   | 0       | 0       | 1                             |                                     |
| 3   | 1       | 0       | 0                             |                                     |
| 4   | 1       | 1       | 1                             |                                     |

- 4) значение выражения равно инверсии третьего столбца (меняем 1 на 0 и наоборот):

| $x$ | $x > 2$ | $x > 3$ | $(x > 2) \rightarrow (x > 3)$ | $\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$ |
|-----|---------|---------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1   | 0       | 0       | 1                             | 0                                   |
| 2   | 0       | 0       | 1                             | 0                                   |
| 3   | 1       | 0       | 0                             | 1                                   |
| 4   | 1       | 1       | 1                             | 0                                   |

- 5) таким образом, ответ – 3.

**Возможные ловушки и проблемы:**

- можно «забыть» отрицание (помните, что правильный ответ – всего один!)
- можно перепутать порядок операций (скобки, «НЕ», «И», «ИЛИ», «импликация»)
- нужно помнить таблицу истинности операции «импликация», которую очень любят составители тестов<sup>4</sup>
- этот метод проверяет только заданные числа и не дает общего решения, то есть не определяет все множество значений  $x$ , при которых выражение истинно

**Решение (вариант 2, упрощение выражения):**

- 1) обозначим простые высказывания буквами:

$$A = x > 2, \quad B = x > 3$$

- 2) тогда можно записать все выражение в виде

$$\neg(A \rightarrow B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B}$$

- 3) выразим импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» (см. выше):

$$\neg(A \rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B} = \overline{\overline{A} + B}$$

- 4) раскрывая по формуле де Моргана операцию «НЕ» для всего выражения, получаем

$$\neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B \quad \text{или} \quad \overline{\overline{A} + B} = A \cdot \overline{B}$$

- 5) таким образом, данное выражение истинно только тогда, когда  $A$  истинно ( $x > 2$ ), а  $B$  – ложно ( $x \leq 3$ ), то есть для всех  $x$ , таких что  $2 < x \leq 3$

- 6) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,

- 7) таким образом, ответ – 3.

**Возможные проблемы:**

- нужно помнить законы логики (например, формулы де Моргана)
- при использовании формул де Моргана нужно не забыть заменить «И» на «ИЛИ» и наоборот
- нужно не забыть, что инверсией (отрицанием) для выражения  $x > 3$  является  $x \leq 3$ , а не  $x < 3$

<sup>4</sup> ... но которая, к сожалению, почти не нужна на практике. ☺

**Решение (вариант 3, использование свойств импликации):**

- 1) обозначим простые высказывания буквами:  
 $A = x > 2, \quad B = x > 3$
- 2) тогда исходное выражение можно переписать в виде  $\neg(A \rightarrow B) = 1$  или  $A \rightarrow B = 0$
- 3) импликация  $A \rightarrow B$  ложна в одном единственном случае, когда  $A = 1$  и  $B = 0$ ; поэтому заданное выражение истинно для всех  $x$ , таких что  $x > 2$  и  $x \leq 3$
- 4) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,
- 5) таким образом, ответ – 3.

**Выводы:**

- 1) в данном случае, наверное, проще третий вариант решения, однако он основан на том, что импликация ложна только для одной комбинации исходных данных; не всегда этот прием применим
- 2) второй и третий варианты позволяют не только проверить заданные значения, но и получить *общее* решение – все множество  $x$ , для которых выражение истинно; это более красиво для человека, обладающего математическим складом ума.

**Задачи для тренировки<sup>5</sup>:**

- 1) Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание  
 $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X < 1))$   
 1) 1            2) 2            3) 3            4) 4
- 2) Для какого числа X истинно высказывание  $((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$   
 1) 1            2) 2            3) 3            4) 4
- 3) Для какого числа X истинно высказывание  $X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$   
 1) 1            2) 2            3) 3            4) 4
- 4) Для какого имени истинно высказывание:  
 $\neg (\text{Первая буква имени гласная} \rightarrow \text{Четвертая буква имени согласная})?$   
 1) ЕЛЕНА        2) ВАДИМ        3) АНТОН        4) ФЕДОР
- 5) Для какого символического выражения неверно высказывание:  
 $\text{Первая буква гласная} \rightarrow \neg (\text{Третья буква согласная})?$   
 1) abedc        2) becde        3) babas        4) abcab
- 6) Для какого числа X истинно высказывание  $(X > 2) \vee (X > 5) \rightarrow (X < 3)$   
 1) 5            2) 2            3) 3            4) 4
- 7) Для какого из значений числа Z высказывание  $((Z > 2) \vee (Z > 4)) \rightarrow (Z > 3)$  будет ложным?  
 1) 1            2) 2            3) 3            4) 4
- 8) Для какого имени истинно высказывание:  
 $\neg (\text{Первая буква имени согласная} \rightarrow \text{Третья буква имени гласная})?$   
 1) ЮЛИЯ        2) ПЕТР        3) АЛЕКСЕЙ        4) КСЕНИЯ

<sup>5</sup> Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2016 гг.
2. Тренировочные и диагностические работы МИОО и Статград.
3. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
4. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М: Экзамен, 2010.
5. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
6. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
7. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
8. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
9. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
10. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
11. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2015. Информатика. Тематические тестовые задания. — М.: Экзамен, 2015.
12. Ушаков Д.М. ЕГЭ-2015. Информатика. 20 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. — М.: Астрель, 2014.

- 9) Для какого из значений числа  $Y$  высказывание  $(Y < 5) \wedge ((Y > 1) \rightarrow (Y > 5))$  будет истинным?  
 1) 1                    2) 2                    3) 3                    4) 4
- 10) Для какого символьного выражения верно высказывание:  
 $\neg$  (Первая буква согласная)  $\wedge$   $\neg$  (Вторая буква гласная)?  
 1) abcde            2) bcade            3) babas            4) cabab
- 11) Для какого имени истинно высказывание:  
 (Вторая буква гласная  $\rightarrow$  Первая буква гласная)  $\wedge$  Последняя буква согласная?  
 1) ИРИНА            2) МАКСИМ            3) МАРИЯ            4) СТЕПАН
- 12) Для какого имени истинно высказывание:  
 $\neg$  (Первая буква согласная  $\rightarrow$  Последняя буква гласная)  $\wedge$  Вторая буква согласная?  
 1) ИРИНА            2) СТЕПАН            3) МАРИНА            4) ИВАН
- 13) Для какого имени истинно высказывание:  
 (Первая буква согласная  $\rightarrow$  Вторая буква согласная)  $\wedge$  Последняя буква гласная?  
 1) КСЕНИЯ            2) МАКСИМ            3) МАРИЯ            4) СТЕПАН
- 14) Для какого имени истинно высказывание:  
 $\neg$  (Вторая буква гласная  $\rightarrow$  Первая буква гласная)  $\wedge$  Последняя буква согласная?  
 1) ИРИНА            2) МАКСИМ            3) МАРИЯ            4) СТЕПАН
- 15) Для какого имени истинно высказывание:  
 $\neg$  (Первая буква согласная  $\rightarrow$  Последняя буква согласная)  $\wedge$  Вторая буква согласная?  
 1) ИРИНА            2) СТЕПАН            3) МАРИЯ            4) КСЕНИЯ
- 16) Для какого имени истинно высказывание:  
 $\neg$  (Первая буква гласная  $\rightarrow$  Вторая буква гласная)  $\wedge$  Последняя буква гласная?  
 1) ИРИНА            2) МАКСИМ            3) АРТЕМ            4) МАРИЯ
- 17) Для какого названия животного ложно высказывание:  
 Заканчивается на согласную  $\wedge$  В слове 7 букв  $\rightarrow$   $\neg$ (Третья буква согласная)?  
 1) Верблюд            2) Страус            3) Кенгуру            4) Леопард
- 18) Для какого названия животного ложно высказывание:  
 В слове 4 гласных буквы  $\wedge$   $\neg$  (Пятая буква гласная)  $\vee$  В слове 5 согласных букв?  
 1) Шиншилла            2) Кенгуру            3) Антилопа            4) Крокодил
- 19) Для какого названия животного ложно высказывание:  
 Четвертая буква гласная  $\rightarrow$   $\neg$  (Вторая буква согласная)?  
 1) Собака            2) Жираф            3) Верблюд            4) Страус

20) Для какого слова ложно высказывание:

*Первая буква слова согласная*  $\rightarrow$  (*Вторая буква имени гласная*  $\wedge$  *Последняя буква слова согласная*)?

- 1) ЖАРА      2) ОРДА      3) ОГОРОД      4) ПАРАД

21) Для какого числа X истинно высказывание  $(X \cdot (X-16) > -64) \rightarrow (X > 8)$

- 1) 5      2) 6      3) 7      4) 8

22) Для какого числа X истинно высказывание  $(X \cdot (X-8) > -25 + 2 \cdot X) \rightarrow (X > 7)$

- 1) 4      2) 5      3) 6      4) 7

23) Для какого символического набора истинно высказывание:

*Вторая буква согласная*  $\wedge$  (*В слове 3 гласных буквы*  $\vee$  *Первая буква согласная*)?

- 1) УББОШТ      2) ТУИОШШ      3) ШУБВОИ      4) ИТТРАО

24) Для какого имени ложно высказывание:

(*Первая буква гласная*  $\wedge$  *Последняя буква согласная*)  $\rightarrow$   $\neg$ (*Третья буква согласная*)?

- 1) ДМИТРИЙ      2) АНТОН      3) ЕКАТЕРИНА      4) АНАТОЛИЙ

25) Для какого имени истинно высказывание:

*Первая буква гласная*  $\wedge$  *Четвертая буква согласная*  $\vee$  *В слове четыре буквы*?

- 1) Сергей      2) Вадим      3) Антон      4) Илья

26) Для какого числа X истинно высказывание

$((X < 4) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 3) \rightarrow (X < 1))$

- 1) 1      2) 2      3) 3      4) 4

27) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$  (*Первая буква согласная*  $\rightarrow$  *Вторая буква согласная*)  $\wedge$  *Последняя буква согласная*?

- 1) ИРИНА      2) МАКСИМ      3) СТЕПАН      4) МАРИЯ

28) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$  (*Первая буква согласная*  $\rightarrow$  *Последняя буква согласная*)  $\wedge$  *Вторая буква согласная*?

- 1) ИРИНА      2) СТЕПАН      3) КСЕНИЯ      4) МАРИЯ

29) Для какого имени истинно высказывание:

(*Первая буква согласная*  $\rightarrow$  *Вторая буква согласная*)  $\wedge$  *Последняя буква гласная*?

- 1) КСЕНИЯ      2) МАКСИМ      3) СТЕПАН      4) МАРИЯ

30) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$  (*Последняя буква гласная*  $\rightarrow$  *Первая буква согласная*)  $\wedge$  *Вторая буква согласная*?

- 1) ИРИНА      2) АРТЁМ      3) СТЕПАН      4) МАРИЯ

31) Для какого слова истинно высказывание:

$\neg$  (Первая буква согласная  $\rightarrow$  (Вторая буква согласная  $\vee$  Последняя буква гласная))?

- 1) ГОРЕ            2) ПРИВЕТ            3) КРЕСЛО            4) ЗАКОН

32) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная  $\rightarrow$  Вторая буква гласная)  $\wedge$  Последняя буква согласная?

- 1) АЛИСА            2) МАКСИМ            3) СТЕПАН            4) ЕЛЕНА

33) Для какого имени истинно высказывание:

(Вторая буква гласная  $\rightarrow$  Первая буква гласная)  $\wedge$  Последняя буква согласная?

- 1) АЛИСА            2) МАКСИМ            3) СТЕПАН            4) ЕЛЕНА

34) Для какого названия реки ложно высказывание:

(Вторая буква гласная  $\rightarrow$  Предпоследняя буква согласная)  $\wedge$  Первая буква стоит в алфавите раньше третьей?

- 1) ДУНАЙ            2) МОСКВА            3) ДВИНА            4) ВОЛГА

35) Для каких значений X и Y истинно высказывание:

$(Y+1 > X) \vee (Y+X < 0) \wedge (X > 1)$ ?

- 1) X = 0,5; Y = -1,1            2) X = 1,1; Y = -4  
3) X = -1; Y = -4            4) X = -1/10; Y = -1,1

36) Для какого слова истинно высказывание:

(Вторая буква согласная  $\vee$  Последняя буква гласная)  $\rightarrow$  Первая буква гласная?

- 1) ГОРЕ            2) ПРИВЕТ            3) КРЕСЛО            4) ЗАКОН

37) Для какого имени истинно высказывание:

Первая буква согласная  $\wedge$  ( $\neg$  Вторая буква согласная  $\rightarrow$  Четвертая буква гласная)?

- 1) ИВАН            2) ПЕТР            3) ПАВЕЛ            4) ЕЛЕНА

38) Для какого названия станции метро истинно высказывание:

(Первая буква согласная  $\rightarrow$  Вторая буква согласная)  $\sim$  Название содержит букву «л»?

Знаком  $\sim$  обозначается операция эквивалентности (результат  $X \sim Y$  – истина, если значения X и Y совпадают).

- 1) Маяковская    2) Отрадное            3) Волжская            4) Комсомольская

39) Для какого названия города истинно высказывание:

(Первая буква гласная  $\wedge$  Последняя буква гласная)  $\sim$  Название содержит букву «м»?

Знаком  $\sim$  обозначается операция эквивалентности (результат  $X \sim Y$  – истина, если значения X и Y совпадают).

- 1) Москва            2) Дюссельдорф            3) Амстердам            4) Атланта

40) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная  $\vee$  Вторая буква гласная)  $\rightarrow$  В слове 4 буквы?

- 1) МИХАИЛ            2) ГРИГОРИЙ            3) ЕВГЕНИЙ            4) ИОЛАНТА

41) Для какого числа  $X$  истинно высказывание  $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X > 1))$

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

42) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5, 15]$  и  $Q = [12, 18]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [3, 11]              2) [2, 21]              3) [10, 17]              4) [15, 20]

43) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5, 10]$  и  $Q = [15, 18]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [3, 11]              2) [6, 10]              3) [8, 16]              4) [17, 23]

44) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 30]$  и  $Q = [15, 20]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 15]              2) [12, 30]              3) [20, 25]              4) [26, 28]

45) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [2, 20]$  и  $Q = [15, 30]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 15]              2) [3, 20]              3) [10, 25]              4) [25, 40]

46) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [0, 12]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 15]              2) [20, 35]              3) [5, 20]              4) [12, 40]

47) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [12, 15]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 15]              2) [20, 35]              3) [5, 20]              4) [12, 40]

48) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [5, 15]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 15]              2) [20, 35]              3) [15, 22]              4) [12, 18]

49) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [15, 25]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [8, 17]      2) [10, 12]      3) [15, 22]      4) [12, 18]

50) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10, 40]$ ,  $Q = [5, 15]$  и  $R = [35, 50]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 20]      2) [15, 25]      3) [20, 30]      4) [120, 130]

51) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [0, 20]$ ,  $Q = [5, 15]$  и  $R = [35, 50]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [-15, -5]      2) [2, 7]      3) [10, 17]      4) [15, 20]

52) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [15, 30]$ ,  $Q = [0, 10]$  и  $R = [25, 35]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 17]      2) [15, 25]      3) [20, 30]      4) [35, 40]

53) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [20, 50]$ ,  $Q = [15, 20]$  и  $R = [40, 80]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 25]      2) [20, 30]      3) [40, 50]      4) [35, 45]

54) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10, 50]$ ,  $Q = [15, 20]$  и  $R = [30, 80]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \notin A) \rightarrow (x \notin R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [10, 25]      2) [25, 50]      3) [40, 60]      4) [50, 80]

55) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [0, 40]$ ,  $Q = [20, 45]$  и  $R = [10, 50]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \notin A) \rightarrow (x \notin R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [5, 20]      2) [10, 15]      3) [15, 20]      4) [35, 50]

56) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5, 15]$  и  $Q = [10, 20]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in P) \wedge (x \notin Q) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 7]      2) [8, 15]      3) [15, 20]      4) [7, 20]

57) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 22]$  и  $Q = [7, 17]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \notin P) \wedge (x \in Q) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 5]      2) [7, 12]      3) [10, 20]      4) [5, 22]

58) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [5, 15]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in Q) \rightarrow (x \in P)) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 6]      2) [5, 8]      3) [7, 15]      4) [12, 20]

59) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [15, 30]$ ,  $Q = [5, 10]$  и  $R = [20, 25]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge ((x \notin A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 20]      2) [0, 10]      3) [10, 15]      4) [25, 30]

60) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [15, 30]$ ,  $Q = [5, 10]$  и  $R = [10, 20]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge (x \notin A) \wedge (x \in R)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 12]      2) [10, 17]      3) [15, 20]      4) [15, 30]

61) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10, 15]$ ,  $Q = [10, 20]$  и  $R = [5, 15]$ . Выберите такой интервал  $A$ , что формулы

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной  $x$  (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) [5, 12]      2) [10, 17]      3) [12, 20]      4) [15, 25]

62) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5, 10]$ ,  $Q = [15, 20]$  и  $R = [25, 30]$ . Выберите такой интервал  $A$ , что формулы

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной  $x$  (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) [5, 10]      2) [15, 20]      3) [10, 20]      4) [15, 25]

63) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10, 25]$ ,  $Q = [15, 30]$  и  $R = [25, 35]$ . Выберите такой интервал  $A$ , что формулы

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной  $x$  (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) (10, 12)      2) (0, 10)      3) (5, 15)      4) (15, 25)

64) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10,30]$ ,  $Q = [15,30]$  и  $R=[20,35]$ . Выберите такой интервал  $A$ , что формулы

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной  $x$  (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) (10, 25)      2) (15, 20)      3) (15, 30)      4) (5, 20)

65) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5,15]$ ,  $Q = [10,20]$  и  $R=[15,20]$ . Выберите такой интервал  $A$ , что формулы

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \notin Q) \rightarrow (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной  $x$  (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) [3, 10]      2) [7, 12]      3) [12, 17]      4) [22, 25]

66) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5,25]$ ,  $Q = [5,15]$  и  $R=[10,20]$ . Выберите такой интервал  $A$ , что формулы

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \notin Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно различны, то есть принимают разные значения при любом значении переменной  $x$  (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) (5, 12)      2) (10, 18)      3) (18, 25)      4) (20, 35)

67) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [3, 9]$  и  $Q = [4, 12]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [0, 5]      2) [5, 10]      3) [10, 15]      4) [15, 20]

68) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [4, 16]$  и  $Q = [9, 18]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [1, 11]      2) [3, 10]      3) [5, 15]      4) [15, 25]

69) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [3, 13]$  и  $Q = [7, 17]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [5, 20]      2) [10, 25]      3) [15, 30]      4) [20, 35]

70) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5, 15]$  и  $Q = [11, 21]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [2, 22]      2) [3, 13]      3) [6, 16]      4) [17, 27]

71) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [30, 45]$  и  $Q = [40, 55]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что обе приведённые ниже формулы истинны при любом значении переменной  $x$ :

$$(\neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P)$$

$$(x \in Q) \rightarrow (x \in A)$$

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [25,50]      2) [25,65]      3) [35,50]      4) [35,85]

72) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [41, 61]$  и  $Q = [11, 91]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [7, 43]      2) [7, 73]      3) [37, 53]      4) [37, 63]

73) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [32, 52]$  и  $Q = [12, 72]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [7, 53]      2) [7, 33]      3) [27, 53]      4) [27, 33]

74) (<http://ege.yandex.ru>) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10,30]$  и  $Q = [20, 40]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [10, 19]      2) [21, 29]      3) [31, 39]      4) [9, 41]

75) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [54,84]$  и  $Q = [64, 94]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [25, 40]      2) [45, 61]      3) [65, 82]      4) [75, 83]

76) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [34,64]$  и  $Q = [74, 94]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [5, 33]      2) [25, 42]      3) [45, 71]      4) [65, 90]

77) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [34,84]$  и  $Q = [44, 94]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [45, 60]      2) [65, 81]      3) [85, 102]      4) [105, 123]

- 78) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [6, 16]$  и  $Q = [30, 50]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 1) 10      2) 20      3) 21      4) 30

- 79) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 40]$  и  $Q = [30, 50]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 1) 10      2) 20      3) 30      4) 40

- 80) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [2, 42]$  и  $Q = [22, 62]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \notin Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [3, 14]      2) [23, 32]      3) [43, 54]      4) [15, 45]

- 81) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [2, 42]$  и  $Q = [22, 62]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \notin Q)) \rightarrow (x \notin A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [3, 14]      2) [23, 32]      3) [43, 54]      4) [15, 45]

- 82) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [3, 33]$  и  $Q = [22, 44]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in Q) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [2, 20]      2) [10, 25]      3) [20, 40]      4) [25, 30]

- 83) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [3, 33]$  и  $Q = [22, 44]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in P) \rightarrow ((x \in Q) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [31, 45]      2) [21, 35]      3) [11, 25]      4) [1, 15]

- 84) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [23, 58]$  и  $Q = [10, 39]$ . Выберите из предложенных вариантов такой отрезок  $A$ , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1) [5, 20]      2) [20, 40]      3) [40, 55]      4) [5, 55]

- 85) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 70]$  и  $Q = [5, 32]$ . Выберите из предложенных вариантов такой отрезок  $A$ , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

1) [15, 35]      2) [20, 40]      3) [40, 65]      4) [75, 88]

- 86) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [23,58]$  и  $Q = [1,39]$ . Выберите из предложенных вариантов такой отрезок  $A$ , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

1) [5, 30]      2) [15, 40]      3) [25, 50]      4) [35, 60]

- 87) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [8,39]$  и  $Q = [23,58]$ . Выберите из предложенных вариантов такой отрезок  $A$ , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

1) [5, 30]      2) [15, 40]      3) [20, 50]      4) [35, 60]

- 88) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

- 89) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

- 90) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

- 91) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$((x \in \{3, 5, 7, 11, 12, 15\}) \rightarrow (x \in \{5, 6, 12, 15\})) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

- 92) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$((x \in \{1, 3, 5, 7, 9, 12\}) \rightarrow (x \in \{3, 6, 9, 12\})) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

- 93) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 8, 12, 15\}) \rightarrow ((x \in \{3, 6, 8, 15\}) \vee (x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

- 94) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$((x \in \{3, 5, 7, 11, 12\}) \rightarrow \neg(x \in \{5, 6, 12, 15\})) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

- 95) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$((x \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}) \rightarrow \neg(x \in \{3, 6, 9, 12\})) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

- 96) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 8, 12, 15\}) \rightarrow (\neg(x \in \{3, 6, 8, 15\}) \vee (x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

97) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{1, 2, 4, 8, 16\}) \wedge \neg(x \in \{3, 4, 9, 16\}) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

98) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{2, 4, 8, 12, 16\}) \wedge \neg(x \in \{3, 6, 7, 15\}) \vee \neg(x \in \{3, 6, 7, 15\}) \vee (x \in A)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

99) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \wedge (x \in \{3, 5, 15\})) \vee \neg(x \in \{3, 5, 15\})$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

100) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in \{1, 3, 7\}) \vee (\neg(x \in \{1, 2, 4, 5, 6\}) \wedge (x \in \{1, 3, 7\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

101) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in \{1, 2, 3, 4\}) \vee \neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

102) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in \{1, 12\}) \wedge \neg(x \in \{12, 13, 14, 15, 16\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

103) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow \neg((x \in \{1, 2, 4, 8\}) \vee (x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

104) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(\neg(x \in A) \wedge (x \in \{3, 6, 9, 12\})) \vee \neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

105) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [44; 49]$  и  $Q = [28; 53]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

106) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [43; 49]$  и  $Q = [44; 53]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

107) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12; 26]$  и  $Q = [30; 53]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

108) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15; 39]$  и  $Q = [44; 57]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .
- 109) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5; 30]$  и  $Q = [14; 23]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .
- 110) Элементами множеств  $A$ ,  $P$  и  $Q$  являются натуральные числа, причём  $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  и  $Q = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ . Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

- истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .  
Определите наибольшее возможное количество элементов множества  $A$ .
- 111) Элементами множеств  $A$ ,  $P$  и  $Q$  являются натуральные числа, причём  $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  и  $Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ . Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

- истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .  
Определите наибольшее возможное количество элементов множества  $A$ .
- 112) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 50]$  и  $Q = [32, 47]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$(\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 113) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 37]$  и  $Q = [32, 47]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in P)) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q))$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 114) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 37]$  и  $Q = [32, 50]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in Q)) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 115) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 33]$  и  $Q = [35, 48]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in Q)) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 116) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 33]$  и  $Q = [45, 68]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in Q)) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

- 117) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [8; 12]$  и  $Q = [4; 30]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .
- 118) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [3; 15]$  и  $Q = [14; 25]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .
- 119) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25; 51]$  и  $Q = [12; 37]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$



$$\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 130) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 16)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 23)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 131) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 12)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 42) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 12))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 132) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наибольшего** натурального числа  $A$  формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 36))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 133) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наибольшего** натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 40) \vee \text{ДЕЛ}(x, 64)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 134) Элементами множеств  $A$ ,  $P$  и  $Q$  являются натуральные числа, причём  $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  и  $Q = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ . Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .  
Определите наибольшее возможное количество элементов множества  $A$ .

- 135) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 14) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 136) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 19) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 137) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 34) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 51))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 138) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого **наименьшего** натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 28) \vee \text{ДЕЛ}(x, 42))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 139) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 18)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 140) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 36)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 12)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 141) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 50)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \text{ДЕЛ}(x, 50))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 142) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 16)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 16) \vee \text{ДЕЛ}(x, 24))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 143) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 45) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 144) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 16)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 145) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 34) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 51)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \vee \text{ДЕЛ}(x, 51))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 146) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 147) (Е.В. Хламов) Пусть  $P$  – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11,  $Q$  – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а  $A$  – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество  $A$ , при котором для любой 8-битовой цепочки  $x$  истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in P) \vee (x \in Q))$$

- 148) (Е.В. Хламов) Пусть  $P$  – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11,  $Q$  – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а  $A$  – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество  $A$ , при котором для любой 8-битовой цепочки  $x$  истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee \neg(x \in Q))$$

- 149) (Е.В. Хламов) Пусть  $P$  – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11,  $Q$  – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а  $A$  – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество  $A$ , при котором для любой 8-битовой цепочки  $x$  истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

- 150) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 56 \neq 0) \rightarrow ((X \& 48 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 151) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 35 \neq 0) \rightarrow ((X \& 31 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 152) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 76 \neq 0) \rightarrow ((X \& 10 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 153) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 102 \neq 0) \rightarrow ((X \& 36 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 154) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 94 \neq 0) \rightarrow ((X \& 21 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 155) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 56 = 0) \rightarrow (X \& 20 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 156) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 30 = 0) \rightarrow (X \& 20 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 157) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 44 = 0) \rightarrow (X \& 76 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 158) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 29 = 0) \rightarrow (X \& 86 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 159) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 14 = 0) \rightarrow (X \& 75 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 160) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 25 \neq 0) \rightarrow ((X \& 17 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 161) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 29 \neq 0) \rightarrow ((X \& 17 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 162) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 29 \neq 0) \rightarrow ((X \& 9 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 163) **(М.В. Кузнецова)** Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((X \& 13 \neq 0) \wedge (X \& 39 \neq 0)) \rightarrow ((X \& A \neq 0) \wedge (X \& 13 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 164) **(М.В. Кузнецова)** Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(((X \& 13 \neq 0) \vee (X \& 39 = 0)) \rightarrow (X \& 13 \neq 0)) \vee ((X \& A = 0) \wedge (X \& 13 = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 165) **(М.В. Кузнецова)** Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(((X \& 13 \neq 0) \vee (X \& A \neq 0)) \rightarrow (X \& 13 \neq 0)) \vee ((X \& A \neq 0) \wedge (X \& 39 = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 166) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(((X \& 13 \neq 0) \vee (X \& A = 0)) \rightarrow (X \& 13 \neq 0)) \vee (X \& A \neq 0) \vee (X \& 39 = 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 167) Элементами множеств  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  являются натуральные числа, причём  $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ ,  $Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ . Известно, что выражение

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in Q))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшее возможное количество элементов в множестве  $A$ .

- 168) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 17 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 169) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 20 \neq 0) \vee (x \& 55 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 7 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 170) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 26 \neq 0) \vee (x \& 13 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 24 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 171) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 26 \neq 0) \vee (x \& 13 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 172) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 26 \neq 0) \vee (x \& 13 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 5 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 173) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 26 = 0) \vee (x \& 13 = 0)) \rightarrow ((x \& 78 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 174) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 28 = 0) \vee (x \& 22 = 0)) \rightarrow ((x \& 56 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 175) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 30 = 0) \vee (x \& 43 = 0)) \rightarrow ((x \& 19 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 176) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 46 = 0) \vee (x \& 18 = 0)) \rightarrow ((x \& 115 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 177) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 38 = 0) \vee (x \& 57 = 0)) \rightarrow ((x \& 11 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 178) **(А.Г. Гильдин, Уфа)** Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 19 = 0) \wedge (x \& 38 \neq 0) \vee ((x \& 43 = 0) \rightarrow ((x \& A = 0) \wedge (x \& 43 = 0)))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 179) **(А.Г. Гильдин, Уфа)** Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 19 = 0) \wedge (x \& 38 \neq 0) \vee ((x \& 43 = 0) \rightarrow ((x \& A = 0) \wedge (x \& 43 = 0)))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 180) Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& A \neq 0) \rightarrow ((x \& 17 = 0) \wedge (x \& 5 = 0)) \rightarrow (x \& 3 \neq 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 181) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 21 = 0) \vee ((x \& 11 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 182) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 39 = 0) \vee ((x \& 42 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 183) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 43 = 0) \vee ((x \& 49 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 184) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 30 = 0) \vee ((x \& 57 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 185) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 43 = 0) \vee ((x \& 50 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 186) **(А. Гильдин, Уфа)** Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 55 = 0) \vee (x \& 10 \neq 0) \vee (x \& A \neq 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 187) **(А. Гильдин, Уфа)** Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 10 \neq 0) \vee (x \& 39 = 0) \wedge (x \& 149 = 0) \vee (x \& A = 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 188) **(А. Гильдин, Уфа)** Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 10 \neq 0) \vee (x \& 39 = 0) \wedge (x \& 149 = 0) \vee (x \& A = 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 189) **(А. Гильдин, Уфа)** Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(x \& 51 \neq 0) \rightarrow (x \& A \neq 0) \vee \neg((x \& 11 \neq 0) \vee (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 190) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 24]$  и  $Q = [18, 30]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наименьшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 191) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 18]$  и  $Q = [8, 30]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наименьшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 192) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 23]$  и  $Q = [8, 30]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наименьшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 193) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 30]$  и  $Q = [8, 25]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наименьшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 194) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 28]$  и  $Q = [8, 16]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наибольшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 195) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [8, 18]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наибольшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 196) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [21, 25]$  и  $Q = [8, 35]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in P) \vee (x \notin Q)) \rightarrow (x \notin A)$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наибольшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 197) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [21, 35]$  и  $Q = [8, 25]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \notin P) \vee (x \in Q)) \rightarrow (x \notin A)$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наибольшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 198) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 28]$  и  $Q = [15, 30]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \notin Q) \vee (x \in A))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ .

- 199) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [22, 35]$  и  $Q = [15, 30]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \notin Q) \vee (x \in A))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ .

- 200) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [8, 16]$  и  $Q = [25, 40]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ .

- 201) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [0, 10]$  и  $Q = [25, 50]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \notin P) \wedge (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ .

- 202) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [7, 15]$  и  $Q = [12, 25]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \notin P) \vee (x \in A)) \wedge ((x \notin Q) \vee (x \in A))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наименьшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 203) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [8, 11]$  и  $Q = [15, 22]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула

$$((x \notin P) \vee (x \in A)) \wedge ((x \notin A) \rightarrow (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ . Какое наименьшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок  $A$ ?

- 204) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$  из интервала  $[50, 120]$

такое, что выражение

$$(x \& A = 0) \rightarrow ((x \& 31 \neq 0) \rightarrow (x \& 35 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 205) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$  из интервала  $[50, 120]$

такое, что выражение

$$(x \& A = 0) \rightarrow ((x \& 31 \neq 0) \rightarrow (x \& 35 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 206) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **количество** натуральных чисел  $A$  таких, что выражение

$$((x \& 7 \neq 0) \rightarrow ((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 54 \neq 0))) \rightarrow ((x \& 27 = 0) \wedge (x \& A \neq 0) \wedge (x \& 7 \neq 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

207) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$  такое, что выражение

$$((x \& 7 \neq 0) \rightarrow ((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 54 \neq 0))) \rightarrow ((x \& 27 = 0) \wedge (x \& A \neq 0) \wedge (x \& 7 \neq 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

208) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$  такое, что выражение

$$((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 62 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 24 = 0) \wedge (x \& A \neq 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

209) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$  *из интервала [43, 55]* такое, что выражение

$$((x \& 17 \neq 0) \rightarrow ((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 58 \neq 0))) \rightarrow ((x \& 8 = 0) \wedge (x \& A \neq 0) \wedge (x \& 58 = 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

210) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$  *из интервала [43, 55]* такое, что выражение

$$((x \& 17 \neq 0) \rightarrow ((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 58 \neq 0))) \rightarrow ((x \& 8 = 0) \wedge (x \& A \neq 0) \wedge (x \& 58 = 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

211) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **количество** натуральных чисел  $A$  таких, что выражение

$$((x \& 17 \neq 0) \rightarrow ((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 58 \neq 0))) \rightarrow ((x \& 8 = 0) \wedge (x \& A \neq 0) \wedge (x \& 58 = 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

212) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **количество** натуральных чисел  $A$  *из интервала [44, 62]* таких, что выражение

$$(((x \& 56 \neq 0) \rightarrow (x \& 18 \neq 0)) \vee (x \& A \neq 0)) \rightarrow ((x \& 18 = 0) \wedge (x \& A = 0) \wedge (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

213) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$  *из интервала [50, 100]* такое, что выражение

$$(((x \& 56 \neq 0) \rightarrow (x \& 18 \neq 0)) \vee (x \& A \neq 0)) \rightarrow ((x \& 18 = 0) \wedge (x \& A = 0) \wedge (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

214) (С.С. Поляков, Саратов)

Определите **наибольшее** натуральное число  $A$  *из интервала [10, 50]* такое, что выражение

$$(((x \& 56 \neq 0) \rightarrow (x \& 18 \neq 0)) \vee (x \& A \neq 0)) \rightarrow ((x \& 18 = 0) \wedge (x \& A = 0) \wedge (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

215) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **количество** натуральных чисел  $A$  *из интервала [80, 200]* таких, что выражение

$$((x \& 56 \neq 0) \vee (x \& 43 \neq 0)) \rightarrow (x \& A \neq 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

216) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , *большее 200*, такое, что выражение

$$((x \& 56 \neq 0) \vee (x \& 43 \neq 0)) \rightarrow (x \& A \neq 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 217) (С.С. Поляков, Саратов) Определите натуральное число  $A$  из интервала  $[75, 125]$  такое, что выражение

$$((x \& 56 \neq 0) \vee (x \& 43 \neq 0)) \rightarrow (x \& A \neq 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 218) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $R$  такое, что выражение

$$(((x \& 54 = 0) \vee (x \& 45 = 0)) \rightarrow (x \& A = 0)) \vee (x \& R = 0)$$

тождественно истинно **при любом натуральном  $A$**  (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$  и любым натуральным значением  $A$ )?

- 219) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **наименьшее** натуральное число  $R$  из интервала  $[10, 50]$  такое, что выражение

$$(((x \& 54 = 0) \vee (x \& 45 = 0)) \rightarrow (x \& A = 0)) \vee (x \& R = 0)$$

тождественно истинно **при любом натуральном  $A$**  (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$  и любым натуральным значением  $A$ )?

- 220) (С.С. Поляков, Саратов) Определите **сколько всего существует натуральных чисел  $R$**  таких, что выражение

$$(((x \& 54 = 0) \vee (x \& 45 = 0)) \rightarrow (x \& A = 0)) \vee (x \& R = 0)$$

тождественно истинно **при любом натуральном  $A$**  (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$  и любым натуральным значением  $A$ )?

- 221) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& 25 \neq 1) \vee ((x \& 34 = 2) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 222) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& 25 \neq 1) \vee ((x \& 34 = 2) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 223) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& 30 \neq 4) \vee ((x \& 35 = 1) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 224) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& 30 \neq 4) \vee ((x \& 35 = 1) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 225) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 39 = 7)) \vee (x \& 30 \neq 6)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 226) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 39 = 7)) \vee (x \& 30 \neq 6)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 227) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 55 = 33)) \vee (x \& 112 \neq 16)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 228) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 55 = 33)) \vee (x \& 112 \neq 16)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 229) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& A = 0) \vee ((x \& 69 = 4) \rightarrow (x \& 118 = 6))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 230) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& A = 0) \vee ((x \& 69 = 4) \rightarrow (x \& 118 = 6))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 231) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [130, 171]$  и  $Q = [150, 185]$ . Укажите наименьшую возможную длину отрезка  $A$  такого, что формула

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge (x \notin A)) \rightarrow (x \notin P))$$

истинна при любом значении переменной  $x$ .

- 232) (Д.В. Богданов) Обозначим через ДЕЛ( $n, m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 5940) \wedge \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 6300)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 5940) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 233) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& A = 0) \wedge (x \& 41 \neq 0) \wedge (x \& 33 = 0)$$

тождественно ложно (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 234) Определите **наименьшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& A = 0) \wedge (x \& 58 \neq 0) \wedge (x \& 22 = 0)$$

тождественно ложно (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 235) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& A \neq 0) \wedge (x \& 41 = 0) \wedge (x \& 37 = 0)$$

тождественно ложно (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 236) Определите **наибольшее** натуральное число  $A$ , при котором выражение

$$(x \& A \neq 0) \wedge (x \& 58 = 0) \wedge (x \& 22 = 0)$$

тождественно ложно (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 237) На числовой прямой даны два отрезка:  $D = [133; 177]$  и  $B = [144; 190]$ . Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$(x \in D) \rightarrow ((\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in D))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 238) На числовой прямой даны два отрезка:  $D = [155; 177]$  и  $B = [111; 160]$ . Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула

$$(x \in D) \rightarrow ((\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in D))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 239) На числовой прямой даны два отрезка:  $D = [155; 177]$  и  $B = [111; 130]$ . Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула
- $$(x \in D) \rightarrow ((\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in D))$$
- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .
- 240) Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула
- $$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 10))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 241) Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула
- $$((x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 7))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 242) Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула
- $$((x \leq 11) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y < A) \rightarrow (y \leq 12))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 243) Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула
- $$((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 15)) \wedge ((x \leq 3) \rightarrow (x \cdot x < A))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 244) Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула
- $$((y \cdot y < A) \rightarrow (y < 16)) \wedge ((x \leq 13) \rightarrow (x \cdot x < A))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 245) Для какого наименьшего целого числа  $A$  формула
- $$((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 10)) \wedge ((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x < A))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 246) Для какого наименьшего целого числа  $A$  формула
- $$((x < 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 7))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 247) Для какого наименьшего целого числа  $A$  формула
- $$((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 12)) \wedge ((x < 11) \rightarrow (x \cdot x < A))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 248) Для какого наименьшего целого числа  $A$  формула
- $$((x < 3) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y < A) \rightarrow (y < 15))$$
- тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?
- 249) Для какого наименьшего целого числа  $A$  формула

$$((y \cdot y < A) \rightarrow (y \leq 14)) \wedge ((x \leq 13) \rightarrow (x \cdot x < A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

250) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 10))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

251) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((y \cdot y < A) \rightarrow (y \leq 8)) \wedge ((x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

252) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x < 10) \rightarrow (x \cdot x < A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 12))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

253) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x < 3) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y < A) \rightarrow (y < 6))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

254) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x \leq 10) \rightarrow (x \cdot x < A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y < 15))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

255) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x \geq 15) \rightarrow (x \cdot x > A)) \wedge ((y \cdot y \geq A) \rightarrow (y > 11))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

256) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x > 14) \rightarrow (x \cdot x > A)) \wedge ((y \cdot y > A) \rightarrow (y \geq 11))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

257) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x > 8) \rightarrow (x \cdot x + 3 \cdot x \geq A)) \wedge ((y \cdot y + 5 \cdot y > A) \rightarrow (y \geq 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

258) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x \geq 11) \rightarrow (x \cdot x + 2 \cdot x > A)) \wedge ((y \cdot y + 3 \cdot y \geq A) \rightarrow (y > 8))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

259) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$(x \geq 12) \wedge (x \cdot x + 6 \cdot x < A) \vee (y \cdot y + 4 \cdot y \geq A) \wedge (y \leq 4)$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

260) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$(x > 11) \wedge (x \cdot x + 3 \cdot x \leq A) \vee (y \cdot y + 5 \cdot y > A) \wedge (y < 6)$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

261) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x \leq A) \rightarrow (x \cdot x < 81)) \wedge ((y \cdot y \leq 49) \rightarrow (y \leq A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

262) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((y \cdot y < 16) \rightarrow (y \leq A)) \wedge ((x \leq A) \rightarrow (x \cdot x \leq 100))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

263) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((y \cdot y < 30) \rightarrow (y < A)) \wedge ((x \leq A) \rightarrow (x \cdot x < 150))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

264) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x < A) \rightarrow (x \cdot x \leq 169)) \wedge ((y \cdot y < 16) \rightarrow (y \leq A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

265) **(М.В. Кузнецова)** Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x < 8) \wedge (x \cdot x \geq A)) \vee ((y \cdot y \leq A) \wedge (y > 8))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

266) **(М.В. Кузнецова)** Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x > 6) \wedge (x \cdot x \leq A)) \vee ((y \cdot y \geq A) \wedge (y < 5))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

267) **(М.В. Кузнецова)** Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x < A) \wedge (x \cdot x > 10)) \vee ((y \cdot y < 10) \wedge (y > A))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

268) **(М.В. Кузнецова)** Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x > A) \wedge (x \cdot x < 19)) \vee ((y \cdot y > 91) \wedge (y < A))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

269) **(М.В. Кузнецова)** Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$((x < A) \wedge (x \cdot x \geq 120)) \vee ((y \cdot y \leq 20) \wedge (y > A))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

- 270) (М.В. Кузнецова) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$\neg ((x > 10) \vee (x \cdot x < A)) \vee \neg ((y \cdot y \geq A) \vee (y \leq 10))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

- 271) (М.В. Кузнецова) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$\neg (((x \geq 7) \vee (x \cdot x < A)) \wedge ((y \cdot y > A) \vee (y \leq 7)))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

- 272) (М.В. Кузнецова) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$\neg ((x \geq A) \vee (x \cdot x < 100)) \vee ((y \cdot y \leq 10) \wedge (y > A))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

- 273) (М.В. Кузнецова) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$(((x+5) \cdot (x-6) < 0) \wedge (x \cdot x \geq A)) \vee ((y \cdot y \leq A) \wedge ((y+5) \cdot (y-6) > 0))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

- 274) (М.В. Кузнецова) Сколько существует целых значений  $A$ , при которых формула

$$(((x-10) \cdot (x+1) \leq 0) \wedge (x \cdot x > A)) \vee ((y \cdot y \leq A) \wedge ((y-10) \cdot (y+1) > 0))$$

тождественно ложна (то есть принимает значение 0 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ )?

- 275) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$((x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 25)) \wedge ((x^2 \leq 16) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наименьшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

- 276) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$((x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 150)) \wedge ((x^2 \leq 64) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наименьшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

- 277) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$((x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 100)) \wedge ((x^2 \leq 16) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наибольшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

- 278) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$((x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 81)) \wedge ((x^2 \leq 64) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наибольшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

- 279) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$( (x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 64) ) \wedge ( (x^2 - 48 \leq 2x) \rightarrow (x \in A) )$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наименьшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

280) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$( (x \in A) \rightarrow (x^2 \leq 144) ) \wedge ( (x^2 - 10x \leq 11) \rightarrow (x \in A) )$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наименьшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

281) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$( (x \in A) \rightarrow (x^2 - 16x \leq 57) ) \wedge ( (x^2 - 21 \leq 4x) \rightarrow (x \in A) )$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наибольшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

282) Известно, что для некоторого отрезка  $A$  формула

$$( (x \in A) \rightarrow (x^2 + 10x \leq 144) ) \wedge ( (x^2 + 6x \leq 112) \rightarrow (x \in A) )$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной  $x$ ). Какую наибольшую длину может иметь отрезок  $A$ ?

283) На числовой прямой даны отрезки  $A = [80; 90]$ ,  $B = [30; 50]$  и  $C = [10; N]$  и функция

$$F(x) = ( \neg (x \in A) \rightarrow (x \in B) ) \wedge ( \neg (x \in C) \rightarrow (x \in A) )$$

При каком наименьшем числе  $N$  функция  $F(x)$  истинна более чем для 25 целых чисел  $x$ ?

284) На числовой прямой даны отрезки  $A = [60; 90]$ ,  $B = [30; 50]$  и  $C = [35; N]$  и функция

$$F(x) = ( \neg (x \in A) \rightarrow (x \in B) ) \wedge ( \neg (x \in C) \rightarrow (x \in A) )$$

При каком наименьшем числе  $N$  функция  $F(x)$  истинна более чем для 35 целых чисел  $x$ ?

285) На числовой прямой даны отрезки  $A = [30; 62]$ ,  $B = [25; 38]$  и  $C = [40; N]$  и функция

$$F(x) = ( \neg (x \in B) \rightarrow \neg (x \in A) ) \wedge ( \neg (x \in C) \rightarrow (x \in B) )$$

При каком наименьшем числе  $N$  функция  $F(x)$  истинна более чем для 20 целых чисел  $x$ ?

286) На числовой прямой даны отрезки  $A = [27; 54]$ ,  $B = [32; 46]$  и  $C = [N; 70]$  и функция

$$F(x) = ( \neg (x \in B) \rightarrow \neg (x \in A) ) \wedge ( \neg (x \in C) \rightarrow (x \in B) )$$

При каком наибольшем числе  $N$  функция  $F(x)$  истинна более чем для 25 целых чисел  $x$ ?

287) Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 3x < A) \vee (x > 20) \vee (y > 40)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

288) Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 3x < A) \vee (x + y > 40)$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

289) Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 5x < A) \vee (x + y > 80)$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

290) Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 4x < A) \vee (x + 2y > 80)$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

291) Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 5x < A) \vee (3x + 2y > 81)$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

- 292) (Досрочный ЕГЭ-2018) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (x > 20) \vee (y > 40)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 293) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(7y + x < A) \vee (2x + 3y > 98)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 294) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 4x < A) \vee (x + 3y > 100) \vee (5x + 2y > 152)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 295) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 4x < A) \vee (x + 4y > 120) \vee (5x - 2y > 50)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 296) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 5x < A) \vee (2x + 4y > 100) \vee (3x - 2y > 70)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 297) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(3y + x < A) \vee (3x + 2y > 80) \vee (3x - 4y > 90)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 298) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y - x < A) \vee (x + 2y > 50) \vee (2x + y < 40)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 299) Укажите наименьшее *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x < A) \vee (7x + 4y > 350) \vee (3y - 2x > 45)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 300) Укажите **наибольшее** *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x > A) \vee (x + 4y > 40) \vee (y - 2x < -35)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 301) Укажите **наибольшее** *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(5y - x > A) \vee (2x + 3y < 90) \vee (y - 2x < -50)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 302) Укажите **наибольшее** *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(5y + 4x > A) \vee (2x + 3y < 92) \vee (y - 2x < -150)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 303) Укажите **наибольшее** *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(3y - x > A) \vee (2x + 3y < 30) \vee (2y - x < -31)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 304) Укажите **наибольшее** *целое* значение  $A$ , при котором выражение

$$(4y - x > A) \vee (x + 6y < 210) \vee (3y - 2x < 30)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 305) (Р.С. Соложенцева) На числовой прямой даны отрезки  $A = [30; 50]$ ,  $B = [40; 46]$  и  $C = [N; 61]$  и функция

$$F(x) = (\neg(x \in B) \rightarrow \neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in C) \rightarrow (x \in B))$$

При каком наибольшем числе  $N$  функция  $F(x)$  истинна более чем для 25 целых чисел  $x$ ?

- 306) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 4x \neq 120) \vee (x > A) \vee (y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 307) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 3x \neq 60) \vee (x > A) \vee (y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 308) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 3x \neq 60) \vee (2x > A) \vee (y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 309) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 5x \neq 80) \vee (3x > A) \vee (y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 310) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(4y + 3x \neq 65) \vee (x > A) \vee (3y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 311) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5y + 3x \neq 110) \vee (x > A) \vee (2y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 312) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(3y + 2x \neq 130) \vee (3x > A) \vee (2y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 313) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5y + 7x \neq 129) \vee (3x > A) \vee (4y > A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 314) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(x \geq 10) \vee (x < y) \vee (xy < A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 315) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(x \geq 7) \vee (2x < y) \vee (xy < A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 316) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(x \geq 13) \vee (x < 3y) \vee (xy < A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 317) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(x \geq 19) \vee (x < 5y) \vee (xy < 2A)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 318) (С.С. Поляков) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5x + 2y \neq 51) \vee (A < x) \vee (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 319) (С.С. Поляков) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 2x \neq 77) \vee (A < 5x) \vee (A < y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 320) (С.С. Поляков) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 4x \neq 100) \vee (A < 9x) \vee (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 321) (С.С. Поляков) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5y + 3x \neq 54) \vee (A < 2x + 3) \vee (A < 4y - 5)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 322) (С.С. Поляков) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y + 7x \neq 498) \vee (A < x + 18) \vee (A < 6y - 3)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 323) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x \neq 10) \vee (A < x) \vee (A < y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 324) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x + 10 \neq 0) \vee (A < 3x) \vee (A < y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 325) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - 2x + 29 \neq 0) \vee (A < x) \vee (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 326) Укажите **наибольшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(3y - 9x + 51 \neq 0) \vee (A < 6x) \vee (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

- 327) (С.С. Поляков) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(48 \neq y + 2x + z) \vee (A < x) \vee (A < y) \vee (A < z)$$

истинно при любых целых неотрицательных  $x, y, z$ ?

- 328) (С.С. Поляков) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(220 \neq y + 2x + z) \vee (A < 6x) \vee (A < y) \vee (A < 2z)$$

истинно при любых целых неотрицательных  $x, y, z$ ?

- 329) (С.С. Поляков) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(x + 3y + 2z - 54 \neq 0) \vee (A < x + 10) \vee (A < 5y - 4x) \vee (A < z + x)$$

истинно при любых целых неотрицательных  $x, y, z$ ?

- 330) (С.С. Поляков) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(80 \neq 5y + 2x + 4z) \vee (A < 6x) \vee (A < y) \vee (A < 3z)$$

истинно при любых целых неотрицательных  $x, y, z$ ?

331) (С.С. Поляков) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(156 \neq 4y + x^2 + 3z) \vee (A < 8x^2) \vee (A < y) \vee (A < 4z)$$

истинно при любых целых неотрицательных  $x, y, z$ ?

332) (С.С. Поляков) Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(3y - 4x - 29 \neq 0) \vee (A < 2x^2 + 5) \vee (A < y^2 - 1)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

333) (С.С. Поляков) Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(21y - 5x \neq -99) \vee (A < 2x - 7) \vee (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

334) (С.С. Поляков) Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(17y - 13x \neq 480) \vee (A < (x+5)^2) \vee (A < 19y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

335) (С.С. Поляков) Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x^2 \neq -80) \vee (A < 13x - 14) \vee (A < y^2 + 15)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

336) (С.С. Поляков) Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(y - x^2 \neq 80) \vee (A < 13x - 14) \vee (A < y^2 + 15)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

337) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + x \neq 17) \vee (A > 7x) \wedge (A > 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

338) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(3y + x \neq 22) \vee (A > 5x - 8) \wedge (A > 2y + 3)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

339) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 3x \neq 23) \vee (A > 2x + 3) \wedge (A > 3y + 11)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

340) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2y + 5x \neq 17) \vee (A > 2x + 3y) \wedge (A > 4y + x + 1)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

341) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(6x + 4y \neq 34) \vee (A > 5x + 3y) \wedge (A > 4y + 15x - 35)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

342) (Д. Ф. Муфаззалов) Укажите **наименьшее натуральное** значение  $A$ , при котором выражение

$$(x > 40) \vee (5y - 3x > 150) \vee (A \geq (x - 20)^2 + (y - 20)^2)$$

истинно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

343) (Д. Ф. Муфаззалов) Укажите **наименьшее натуральное** значение  $A$ , при котором выражение

$$(50 > x) \wedge (144 \geq 4y - 3x) \wedge (A^2 < (x - 25)^2 + (y - 25)^2)$$

ложно для любых целых положительных значений  $x$  и  $y$ .

344) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5x + 3y \neq 60) \vee ((A > x) \wedge (A > y))$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

- 345) Укажите **наименьшее** целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(2x + 3y \neq 72) \vee ((A > x) \wedge (A > y))$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

- 346) **(С.С. Поляков, Саратов)** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(7k + 2n > 17) \vee ((k < A) \wedge (n \leq A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $k$  и  $n$ ?

- 347) **(С.С. Поляков, Саратов)** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(3t + 8m > 89) \vee ((m < A) \wedge (t \leq A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $t$  и  $m$ ?

- 348) **(С.С. Поляков, Саратов)** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5k + 9m > 121) \vee ((k - 13 \leq A) \wedge (m + 12 < A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $k$  и  $m$ ?

- 349) **(С.С. Поляков, Саратов)** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(k + 9m > 121) \vee ((k - 13 \leq A) \wedge (m + 12 < A))$$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных  $k$  и  $m$ ?

- 350) **(С.С. Поляков, Саратов)** Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(k + m > 12) \vee ((k - 10 > A) \wedge (m + 10 > A))$$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных  $k$  и  $m$ ?

- 351) **(С.С. Поляков, Саратов)** Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(k + m > 10) \vee ((k + m > A) \wedge (k - m > A))$$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных  $k$  и  $m$ ?

- 352) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Укажите наибольшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(5y + 2x = 65) \rightarrow ((2x \leq A) \rightarrow (3y > A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

- 353) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(x < 9) \rightarrow ((5y < x) \rightarrow (2xy < A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

- 354) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Для скольких целых положительных значений  $A$  выражение

$$(2x + 3y \neq 13) \vee (2y + 3x \neq 12) \vee ((x^2 + 3x - 1 < A) \wedge (2y^2 - 4y + 20 > A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

- 355) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Для скольких целых положительных значений  $A$  выражение

$$(-5x + y \neq -7) \vee (x^2 - y \neq 1) \vee ((x + 3y > A) \wedge (y - x \leq A))$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

- 356) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Для какого целого положительного значения  $A$  выражение

$$((y \geq -4x + 12) \wedge (y \geq 4x - 12)) \equiv (y \geq A|x - 3|)$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

- 357) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Для какого целого положительного значения  $A$  выражение

$$((y \leq 5x - 14) \wedge (y \leq -5x + A)) \equiv (y - 6 \leq -5|x - 4|)$$

тождественно истинно при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

- 358) **(А.М. Кабанов, Тольятти)** Для какого целого положительного значения  $A$  выражение

$$(y \leq |x^2 - 4x - 5|) \equiv ((y \leq x^2 - 4x - 5) \vee (y \leq -(x - 2)^2 + A))$$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

359) (А.М. Кабанов, Тольятти) Для какого целого положительного значения  $A$  выражение

$$(y \leq (4 + |x + 8| + |x - 8|)) \equiv ((y \leq 2x + 4) \vee (y \leq A))$$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

360) (А.М. Кабанов, Тольятти) Найдите целые положительные значения  $A$  и  $B$ , при которых выражение

$$(y \leq ((x - 4)^2 + 2 + |(x - 2)^2 - 16|)) \equiv ((y \leq 2x^2 - 12x + A) \vee (y \leq -4x + B))$$

тождественно истинно при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ . В ответе запишите их сумму.

361) (А. Богданов) Для какого наибольшего целого числа  $A$  выражение

$$(A < x) \vee (A < y) \vee (A < 101 - x - y)$$

тождественно истинно при любых целых  $x$  и  $y$ ?

362) (А.Н. Носкин) Сколько существует различных комбинаций натуральных значений  $x$  и  $y$ , при которых истинно выражение

$$\neg((x > 1) \wedge ((x + y) \geq 6)) \vee (y \geq 5)$$

363) (А.Н. Носкин) Сколько существует различных комбинаций неотрицательных целых значений  $x$  и  $y$ , при которых истинно выражение

$$\neg((x > 6) \wedge ((x + y) \geq 5)) \vee (y \geq 5)$$

364) (А.Н. Носкин) Сколько существует различных комбинаций неотрицательных целых значений  $x$  и  $y$ , при которых истинно выражение

$$\neg((x > 5) \vee ((x + y) \geq 4) \vee (y \geq 5))$$

365) (А.М. Кабанов) Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(x > 7) \vee (y > 4) \vee (x^2 + 3y < A)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

366) (А.М. Кабанов) Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(x > 4) \vee (x + 2 < y) \vee (x^2 + y^2 < A)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

367) (А.М. Кабанов) Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(x^2 - 3x + 2 > 0) \vee (y > x^2 + 7) \vee (xy < A)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

368) (А.М. Кабанов) Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(x^2 - 10x + 16 > 0) \vee (y^2 - 10y + 21 > 0) \vee (xy < 2A)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

369) (А.М. Кабанов) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(x^2 - 11x + 28 > 0) \vee (y^2 - 9y + 14 > 0) \vee (x^2 + y^2 > A)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

370) Для какого наименьшего целого числа  $A$  выражение

$$((x - 20 < A) \wedge (20 - x < A)) \vee (x \cdot y > 50)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

371) Для какого наименьшего целого числа  $A$  выражение

$$((y - 40 < A) \wedge (30 - y < A)) \vee (x \cdot y > 20)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

372) Для какого наименьшего целого числа  $A$  выражение

$$((y - 20 < A) \wedge (10 - x < A)) \vee (x \cdot (y + 2) > 48)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

373) Для какого наименьшего целого числа  $A$  выражение

$$((x - 30 < A) \wedge (15 - y < A)) \vee (x \cdot (y + 3) > 60)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

374) Для какого наименьшего целого числа  $A$  выражение

$$((x - 20 < A) \wedge (10 - y < A)) \vee ((x+4) \cdot y > 45)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

375) (А. Минак) Для какого наименьшего целого числа  $A$  выражение

$$(x \cdot y > A) \wedge (x > y) \wedge (x < 8)$$

тождественно ложно, т.е. принимает значение 0 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?

376) (С.А. Скопинцева) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg((x \in \{2, 4, 9, 10, 15\}) \equiv (x \in A)) \rightarrow ((x \in \{3, 8, 9, 10, 20\}) \equiv (x \in A))$$

истинно (т.е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

377) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$((\text{ДЕЛ}(x, 12) \vee \text{ДЕЛ}(x, 36)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)) \wedge (A^2 - A - 90 < 0)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

378) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge (A < 10) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 44) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 99) \wedge (A < 10)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

379) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$((\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 180)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 130)) \wedge (A < 100)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

380) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$((\text{ДЕЛ}(x, 36) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 42)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)) \wedge (A \cdot (A - 25) < 25 \cdot (A + 200))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

381) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \vee \text{ДЕЛ}(x, 36) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 126)) \wedge (A > 1000)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

382) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 54) \vee \text{ДЕЛ}(x, 130)) \wedge (A > 60)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

383) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 54) \vee \text{ДЕЛ}(x, 130)) \wedge (A > 110)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

384) (В.Н. Шубинкин) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула



- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 396) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(130, A) \wedge ((\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 38)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 78))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 397) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(108, A) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 42) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 68)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 398) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(70, A) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 35) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 63)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 399) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(144, A) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 24)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 400) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(120, A) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 36) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 401) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(70, A) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 42)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 402) **(Е. Джобс)** Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$(\text{ДЕЛ}(x, A - 21) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 40 - A)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 90)$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 403) **(Е. Джобс)** Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение  

$$(x - 2y < 3A) \vee (2y > x) \vee (3x > 50)$$
тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных  $x$  и  $y$ ?
- 404) **(Е. Джобс)** Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение  

$$(75 \neq 2x + 3y) \vee (A > 3x) \vee (A > 2y)$$
тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых **неотрицательных**  $x, y$ ?
- 405) **(Е. Джобс)** Для какого наименьшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение  

$$(5x - 6y < A) \vee (x - y > 30)$$
тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых **неотрицательных**  $x, y$ ?
- 406) **(Е. Джобс)** Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 84) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 90)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 407) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 35) \wedge (\text{ДЕЛ}(730, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(110, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 408) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 12) \wedge (\text{ДЕЛ}(530, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(170, x)))$$

- тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 409) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 7) \wedge (\text{ДЕЛ}(240, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(780, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 410) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 3) \wedge (\text{ДЕЛ}(220, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(550, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 411) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 9) \wedge (\text{ДЕЛ}(280, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(730, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 412) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Сколько существует натуральных значений  $A$  на отрезке  $[1;1000]$ , при которых формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 35) \wedge (\text{ДЕЛ}(730, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(110, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 413) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Сколько существует натуральных значений  $A$  на отрезке  $[1;1000]$ , при которых формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 12) \wedge (\text{ДЕЛ}(530, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(170, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 414) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Сколько существует натуральных значений  $A$  на отрезке  $[1;1000]$ , при которых формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 7) \wedge (\text{ДЕЛ}(240, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(780, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 415) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Сколько существует натуральных значений  $A$  на отрезке  $[1;1000]$ , при которых формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 3) \wedge (\text{ДЕЛ}(220, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(550, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 416) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Сколько существует натуральных значений  $A$  на отрезке  $[1;1000]$ , при которых формула  

$$\text{ДЕЛ}(A, 9) \wedge (\text{ДЕЛ}(280, x) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(A, x) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(730, x)))$$
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном  $x$ ?
- 417) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение  

$$(X \& 87 = 0) \rightarrow ((X \& 31 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?
- 418) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение  

$$(X \& 107 = 0) \rightarrow ((X \& 55 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?
- 419) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение  

$$(X \& 41 = 0) \rightarrow ((X \& 119 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 420) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 53 = 0) \rightarrow ((X \& 19 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 421) Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 13 = 0) \rightarrow ((X \& 40 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

- 422) (**А. Богданов**) На числовой прямой дан отрезок  $Q = [29; 47]$ . Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 3) \wedge x \notin \{48, 52, 56\}) \rightarrow ((|x - 50| \leq 7) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \& A = 0)$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 423) (**Е. Джобс**) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Сколько существует целых положительных значений  $A$ , таких что выражение

$$\text{ДЕЛ}(A, 5) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(2020, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 1718) \rightarrow \text{ДЕЛ}(2023, A)))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 424) (**Е. Джобс**) Обозначим через  $\text{div}(n, m)$  результат целочисленного деления натурального числа  $n$  на натуральное число  $m$ . Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\text{div}(x, 50) > 3) \vee \neg(\text{div}(x, 13) > 3) \vee (\text{div}(x, A) > 6)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 425) (**С. Скопинцева**) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\neg (\text{ДЕЛ}(x, 16) \equiv \text{ДЕЛ}(x, 24)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

- 426) (**А. Богданов**) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа  $A$  выражение

$$(2y + x \neq 70) \vee (x < y) \vee (A < x)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

- 427) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5, 15]$  и  $Q = [12, 18]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 428) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5, 20]$  и  $Q = [25, 38]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 429) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 20]$  и  $Q = [5, 38]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

430) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [15, 28]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

431) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [25, 36]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

432) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 40]$  и  $Q = [25, 35]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

433) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 26]$  и  $Q = [20, 35]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

434) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 26]$  и  $Q = [30, 35]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

435) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [12, 46]$  и  $Q = [20, 30]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

436) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [11, 28]$  и  $Q = [15, 35]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

437) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [11, 28]$  и  $Q = [35, 55]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

438) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [11, 28]$  и  $Q = [5, 55]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge \neg(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

439) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 22]$  и  $Q = [20, 36]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \rightarrow (\neg(x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

440) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 42]$  и  $Q = [20, 36]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \rightarrow (\neg(x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

441) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 22]$  и  $Q = [30, 36]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \rightarrow (\neg(x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 442) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 30]$  и  $Q = [22, 46]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 443) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 30]$  и  $Q = [12, 24]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 444) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [32, 44]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 445) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [20, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 446) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 40]$  и  $Q = [20, 35]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 447) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [28, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 448) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 15]$  и  $Q = [14, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(\neg(x \in P) \vee \neg(x \in Q)) \wedge \neg(x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 449) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [14, 20]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(\neg(x \in P) \vee \neg(x \in Q)) \wedge \neg(x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 450) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [34, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(\neg(x \in P) \vee \neg(x \in Q)) \wedge \neg(x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 451) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 25]$  и  $Q = [14, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(x \in A) \wedge \neg((x \in P) \rightarrow \neg(x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 452) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 15]$  и  $Q = [34, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(x \in A) \wedge \neg((x \in P) \rightarrow \neg(x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 453) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [4, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(x \in A) \wedge \neg((x \in P) \rightarrow \neg(x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

454) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 38]$  и  $Q = [29, 44]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \wedge \neg(\neg(x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

455) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 38]$  и  $Q = [39, 44]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \wedge \neg(\neg(x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

456) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 38]$  и  $Q = [9, 44]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \wedge \neg(\neg(x \in Q) \vee (x \in A))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

457) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [10, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg((x \in Q) \rightarrow (x \in A)) \wedge (x \in P)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

458) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [25, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg((x \in Q) \rightarrow (x \in A)) \wedge (x \in P)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

459) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [35, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg((x \in Q) \rightarrow (x \in A)) \wedge (x \in P)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

460) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [35, 60]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(x \in A) \wedge ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

461) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 35]$  и  $Q = [30, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(x \in A) \wedge ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

462) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 50]$  и  $Q = [30, 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$\neg(x \in A) \wedge ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

463) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 50]$  и  $Q = [35, 45]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge \neg(x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

464) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 20]$  и  $Q = [35, 45]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge \neg(x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

465) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 35]$  и  $Q = [45, 78]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge \neg(x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

466) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 35]$  и  $Q = [45, 78]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

467) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 45]$  и  $Q = [30, 78]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

468) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 80]$  и  $Q = [30, 50]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

469) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [30, 50]$  и  $Q = [10, 80]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

470) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 27]$  и  $Q = [30, 45]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

471) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 37]$  и  $Q = [30, 45]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

472) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 75]$  и  $Q = [10, 30]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

473) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 75]$  и  $Q = [30, 75]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

474) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 40]$  и  $Q = [35, 60]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in Q) \vee (x \in P)) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

475) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 30]$  и  $Q = [35, 60]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in Q) \vee (x \in P)) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .

476) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 30]$  и  $Q = [5, 60]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in Q) \vee (x \in P)) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 477) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [15, 60]$  и  $Q = [15, 30]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(\neg(x \in Q) \vee (x \in P)) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 478) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [5, 53]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in P))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 479) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [25, 57]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in P))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 480) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 30]$  и  $Q = [35, 57]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in P))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 481) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [20, 80]$  и  $Q = [35, 57]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in P))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной  $x$ .  
 482) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [10, 40]$ ,  $Q = [5, 15]$  и  $R = [35, 50]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 483) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [20, 30]$ ,  $Q = [5, 15]$  и  $R = [35, 50]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 484) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [80, 103]$ ,  $Q = [5, 15]$  и  $R = [35, 50]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 485) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5, 100]$ ,  $Q = [15, 25]$  и  $R = [35, 50]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 486) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5, 100]$ ,  $Q = [15, 25]$  и  $R = [35, 50]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 487) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5, 20]$ ,  $Q = [15, 25]$  и  $R = [35, 50]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .  
 488) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5, 108]$ ,  $Q = [28, 40]$  и  $R = [16, 72]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 489) На числовой прямой даны три отрезка:  $P = [5, 110]$ ,  $Q = [15, 42]$  и  $R = [25, 70]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 490) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 98]$ ,  $Q = [1, 42]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 491) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [1, 42]$ ,  $Q = [25, 98]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 492) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [1, 98]$ ,  $Q = [25, 42]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 493) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 42]$ ,  $Q = [1, 98]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 494) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25; 50]$ ,  $Q = [40; 75]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 495) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25; 50]$ ,  $Q = [54; 75]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 496) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25; 120]$ ,  $Q = [54; 75]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 497) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [55; 80]$ ,  $Q = [20; 105]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in Q) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 498) ([PRO100 ЕГЭ](#)) Укажите наименьшее целое значение  $A$ , при котором выражение

$$(680y + 256x < A) \vee (5x + 3y > 11112)$$

истинно для любых целых неотрицательных значений  $x$  и  $y$ .

- 499) (**Досрочный ЕГЭ-2022**) Обозначим через  $ДЕЛ(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(ДЕЛ(x, 3) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 5)) \vee (x + A \geq 70)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 500) Обозначим через  $ДЕЛ(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(ДЕЛ(x, 7) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 21)) \vee (2x + A \geq 120)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

501) Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(ДЕЛ(x, 12) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 90)) \vee (x + 2A \geq 512)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

502) Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(ДЕЛ(x, 250) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 10)) \vee (3x + 2A \geq 1000)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

503) Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(ДЕЛ(x, 175) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 25)) \vee (2x + A \geq 1780)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

504) **(Е. Джобс)** Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(ДЕЛ(x, 6) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 14)) \vee (x + A \geq 70) \wedge ДЕЛ(A, 20)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

505) **(Е. Джобс)** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [117; 158]$  и  $Q = [129; 180]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in P) \rightarrow ((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

506) **(ЕГЭ-2022)** Для какого наибольшего целого неотрицательного  $A$  выражение

$$(x + y \leq 22) \vee (y \leq x - 6) \vee (y \geq A)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых положительных значениях переменных  $x$  и  $y$ ?

507) **(ЕГЭ-2022)** Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего целого неотрицательного  $A$  выражение

$$(ДЕЛ(x, 2) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 3)) \vee (x + A \geq 80)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

508) **(Е. Джобс)** Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». При скольких целых неотрицательных значениях  $A$  выражение

$$ДЕЛ(A, 25) \wedge (ДЕЛ(x, 24) \wedge ДЕЛ(x, 75) \rightarrow ДЕЛ(x, A))$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

509) **(А. Богданов)** Для какого наибольшего целого неотрицательного  $A$  выражение

$$(2y + x \neq 70) \vee (x < y) \vee (A < x)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных  $x$  и  $y$ ?

510) **(Е. Джобс)** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [254; 800]$  и  $Q = [410; 823]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$((x \in P) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

511) **(А. Кабанов)** Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ »; и пусть на числовой прямой дан отрезок  $B = [70; 80]$ . Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$ДЕЛ(x, A) \vee ((x \in B) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 18))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

- 512) (А. Кабанов) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ »; и пусть на числовой прямой дан отрезок  $B = [50; 70]$ . Для какого наибольшего натурального числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \vee (\text{ДЕЛ}(x, 23) \rightarrow \neg(x \in B))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

- 513) (А. Кабанов) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ »; и пусть на числовой прямой дан отрезок  $B = [160; 180]$ . Для какого количества различных натуральных значений числа  $A$  формула

$$(x \in B) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 35) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

- 514) (А. Кабанов) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ »; и пусть на числовой прямой дан отрезок  $B = [70; 80]$ . Для какого количества различных натуральных значений числа  $A$  формула

$$\text{ДЕЛ}(x, 12) \wedge (x \in B) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

- 515) (А. Кабанов) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ »; и пусть на числовой прямой дан отрезок  $B = [20; 80]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in B) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 17) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?

- 516) (А. Кабанов) Обозначим через  $\text{ДЕЛ}(n, m)$  утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ »; и пусть на числовой прямой дан отрезок  $B = [10; 40]$ . Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \vee ((x \in B) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 6))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ ?